Inverzna iteracija

Želimo poiskati najmanjšo lastno vrednost (po abs. vrednosti) in pripadajoči lastni vektor.

Problem je ekvivalenten iskanju največje l. vrednosti A^{-1}.

Izvajamo potenčno metodo na A^{-1}!

Paziti moramo:

$$\boxed{y_{k+1} = A^{-1} z_k}, \quad z_{k+1} = \frac{1}{\|y_{k+1}\|} y_{k+1}$$

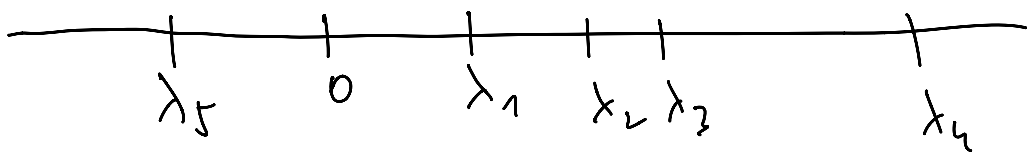
Rešujemo sistem: $A y_{k+1} = z_k$

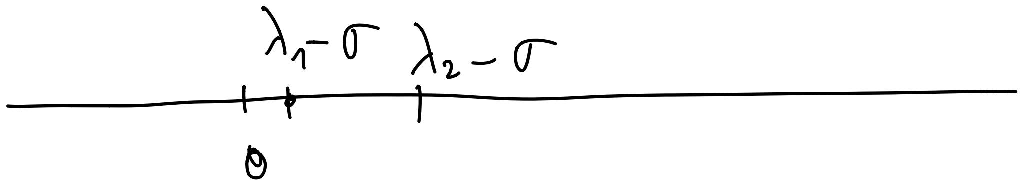
$\Rightarrow$ LU razcep s pivotiranjem izračunamo samo ENKRAT!!!

Ko izračunamo lastni vektor $\Rightarrow$ uporabimo Rayleighov kvocient za lastno vrednost!

Kaj pa obratno? Imamo približek σ za lastno vrednost λ matrike A, kako izračunati pripadajoči lastni vektor za $\underline{\underline{\lambda}}$.

Ideja: Izvajamo inverzno iteracijo na $A - \sigma \underline{I}$.

A :


$A - \sigma \underline{I}$:


QR iteracija:

Osnovna varianta:

$$A_0 = A$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

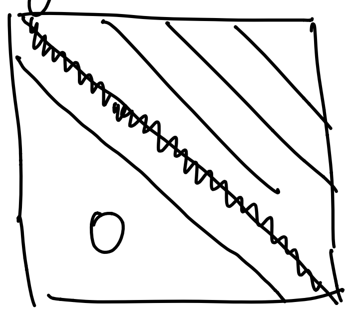
$$A_k = Q_k R_k \quad (\text{QR razcep})$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

Lema: Če ima matrika A paroma različne absolutne vrednosti, potem zaporedje $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ konvergira proti Schurovi formi.

Izboljšave:

- Matriko A reduciramo v zgornjo Hessenbergovo matriko (podobnostno):

$PAP^T =$ 

Velja: Če je A zgornja Hessenbergova, se struktura ohranja med QR iteracijo!!

- Hitrost konvergence pospešimo s premiki.

Metode za simetrične matrike

PAP^T podobnostna transformacija ($PP^T = I$) tako, da je PAP^T zgornja Hessenbergova, potem je za simetrično matriko PAP^T celo tridiagonalna.

Privzeli bomo, da je A tridiagonalna.

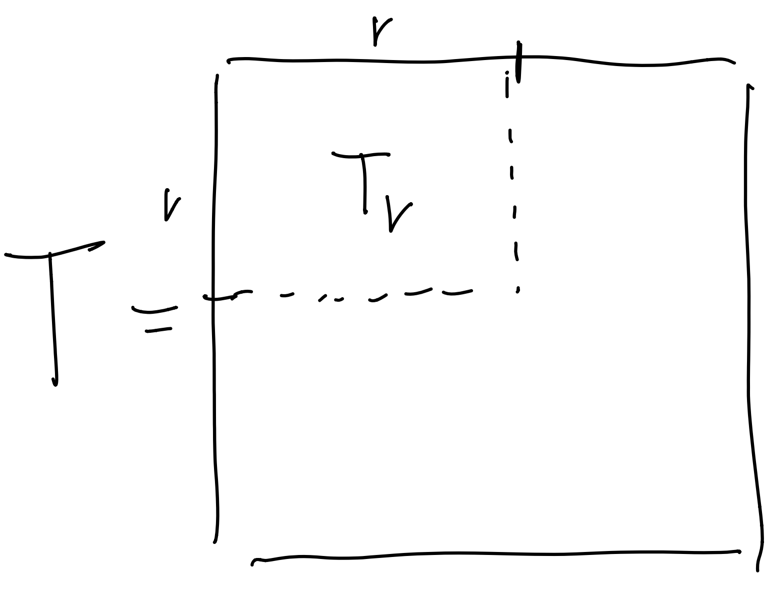
Sturmovo zaporedje

Naj bo

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & 0 \\ & b_2 & \ddots & & \\ & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

ireducibilna ($b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$) tridiag. simetrična matrika.

Naj bo T_r vodilna $r \times r$ podmatrika matrike T:



$r = 1, \dots, n$

$$f_r(\lambda) = \det(T_r - \lambda I).$$

Velja: $f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda) f_r(\lambda)$

$- b_r^2 f_{r-1}(\lambda)$; $f_0(\lambda) = 1$, $f_1(\lambda) = a_1 - \lambda$.

Zaporedje $\{f_r\}_{r=0}^{n}$ je zaporedje polinomov in ničle f_n so lastne vrednosti matrike T.

Izrek: Polinomi f_r, $r = 0, 1, \dots, n$, tvorijo t.i. Sturmovo zaporedje, kar pomeni, da je:

1. $f_0(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda$.
2. Če je $f_r(\lambda_0) = 0$ za $r < n$, je $f_{r-1}(\lambda_0) f_{r+1}(\lambda_0) < 0$.
3. Če je $f_n(\lambda_0) = 0$, potem je

$$f_{n-1}(\lambda_0)\, f_n'(\lambda_0) < 0.$$

Izberimo λ_0 in z $n(\lambda_0)$ označimo število ujemanj predznakov v zaporedju števil $f_r(\lambda_0)$, $r = 0, 1, \dots, n$.

Vsako notranjo ničlo štejemo štejemo za eno ujemanje, ničlo na koncu pa ne.

Primeri:

	$f_0(\lambda_0)$	$f_1(\lambda_0)$	$f_2(\lambda_0)$	$f_3(\lambda_0)$	$f_4(\lambda_0)$
λ_0:	+	+	−	+	−

$$\Downarrow$$

$$n(\lambda_0) = 1$$

λ_0:	+	0	+	+	−

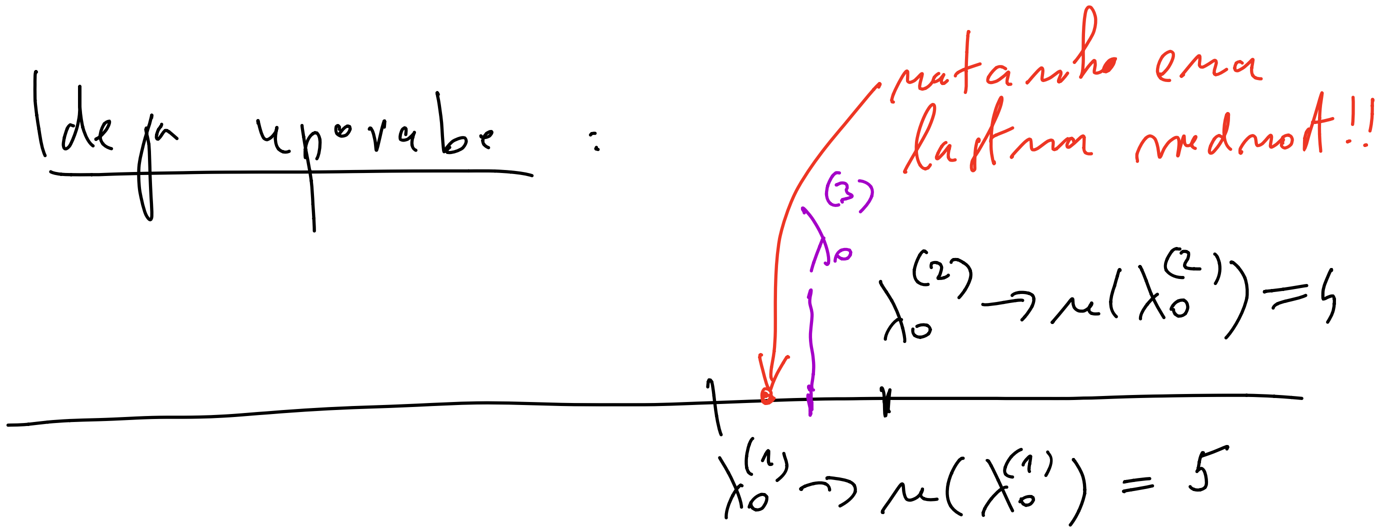
$$n(\lambda_0) = 2$$

λ_0	−	−	−	+	0

$$n(\lambda_0) = 2$$

Lema: Število ujemanj $u(\lambda_0)$ je enako številu lastnih vrednosti matrike T, ki so strogo večje od λ_0.

Ideja uporabe:



Primer: Koliko lastnih vrednosti matrike

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

je manjših od -1!

$\lambda_0 = -1$; $a_r \equiv -2$ in $b_r \equiv +1$.

$$f_0(-1) = 1$$

$$f_1(-1) = a_1 - (-1) = -2 + 1 = -1$$

$$f_2(-1) = (-2-(-1))(-1) - 1\cdot 1$$
$$= (-2+1)(-1) - 1 = 0$$

$$f_3(-1) = (-2+1)(0) - 1\cdot(-1) = 1$$

$$f_4(-1) = (-2+1)\cdot 1 - 1\cdot 0 = -1$$

$$1, \; -1, \; 0, \; 1, \; -1$$

$u(-1) = 1 \Rightarrow$ ena lastna vrednost je večja od -1, tri lastne vrednosti ≤ -1.