

Adjungirana preslikava - 3. del

8. Normalne matrice

Običajno matrika ne komutira s svojo adjungirano matriko. Kadar pa komutira, ima zelo lepe lastnosti.

Definicija normalne matrice

Kompleksna matrika A je **normalna**, če zadošča $A^*A = AA^*$.

Najprej zabeležimo preprosto ugotovitev.

Trditev

Vsaka normalna matrika je kvadratna.

Dokaz: Če je A $m \times n$ matrika, potem je $A^* = (\overline{A})^T$ $n \times m$ matrika. Matrika A^*A je potem $n \times n$ matrika, matrika AA^* pa $m \times m$ matrika. Če je A normalna, potem velja $n = m$, torej je A kvadratna matrika. $\square$

Oglejmo si nekaj primerov normalnih matrik.

Primer 1: Hermitske matrike so normalne

Če je A hermitska, potem velja $A^* = A$. Odtod sledi $A^*A = A^2 = AA^*$. Torej je A normalna matrika.

Primer 2: Unitarne matrike so normalne

Če je A unitarna, potem je $A^* = A^{-1}$. Odtod sledi $A^*A = I = AA^*$. Torej je A normalna matrika.

Primer 3: Diagonalne matrike so normalne

Če je A diagonalna, potem je tudi A^* diagonalna. Dve diagonalni matriki vedno komutirata, zato je $A^*A = AA^*$. Torej je A normalna matrika.

Primer 4: Iz $A = A^T$ ne sledi nujno, da je A normalna

Matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ zadošča $A = A^T$, vendar ni normalna.

Primer 5: Normalne 2×2 matrike

Matrika $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je normalna $\iff |b| = |c|$ in $\bar{c}(a - d) = b(\bar{a} - \bar{d})$.

Dokaz: 2×2 matrika je normalna natanko tedaj, ko velja

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}$$

To pa velja natanko tedaj, ko je

$$\begin{aligned} \bar{a}a + \bar{c}c &= a\bar{a} + b\bar{b} & \bar{a}b + \bar{c}d &= a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{b}a + \bar{d}c &= c\bar{a} + d\bar{b} & \bar{b}b + \bar{d}d &= c\bar{c} + d\bar{d} \end{aligned}$$

Prva in četrta enakost sta ekvivalentni z $b\bar{b} = c\bar{c}$, se pravi z

$$|b| = |c|$$

Tretja enakost je samo konjugirana druga enakost, ki je ekvivalentna z

$$\bar{c}(a - d) = b(\bar{a} - \bar{d})$$

Če je λ lastna vrednost matrike A , potem vemo, da je $\bar{\lambda}$ lastna vrednost matrike A^* . Vemo tudi, da v splošnem iz $Av = \lambda v$ ne sledi $A^*v = \bar{\lambda}v$. Velja pa to za normalne matrike, kar bomo dokazali v dveh korakih.

Trditev

Če je matrika A normalna, potem je za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ tudi $A - \lambda I$ normalna.

Dokaz. Označimo $B = A - \lambda I$. Iz lastnosti adjungiranja sledi, da je $B^* = A^* - \bar{\lambda}I$. Ker je A normalna, velja $A^*A = AA^*$. Odtod sledi $BB^* = AA^* - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + \lambda\bar{\lambda}I = A^*A - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + \lambda\bar{\lambda}I = B^*B$. □

Trditev

Če je matrika A normalna, potem imata A in A^* enake lastne vektorje.

Dokaz: Naj bo λ lastna vrednost normalne matrike A . Po prejšnji trditvi je tudi $B = A - \lambda I$ normalna matrika. Vemo že, da odtod sledi

$$\text{Ker } B = \text{Ker } B^*B = \text{Ker } BB^* = \text{Ker } B^*.$$

Torej za normalno matriko A velja

$$\text{Ker } (A - \lambda I) = \text{Ker } (A^* - \bar{\lambda}I).$$

Izrek

Vsaka normalna matrika je podobna diagonalni matriki.

Dokaz: Radi bi dokazali, da je vsak korenski podprostor normalne matrike že kar lastni podprostor. Iz korenskega razcepa potem sledi, da ima matrika n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, torej se da diagonalizirati.

Naj bo A normalna matrika in naj bo λ njena lastna vrednost. Vemo, da je potem tudi matrika $B = A - \lambda I$ normalna. Radi bi dokazali, da velja

$$\text{Ker } B^2 = \text{Ker } B. \quad (1)$$

Odtod s popolno indukcijo dokažemo, da velja $\text{Ker } B^{2^k} = \text{Ker } B$ za vsak k . Ker je $2^k \geq k$ za vsak k , odtod sledi $\text{Ker } B \subseteq \text{Ker } B^k \subseteq \text{Ker } B^{2^k} = \text{Ker } B$, torej je $\text{Ker } B^k = \text{Ker } B$ za vsak k . To pomeni, da je korenski podprostor za λ res enak lastnemu podprostoru za λ .

Vemo že, da velja

$$\text{Ker } B^*B = \text{Ker } B. \quad (2)$$

Če v formulo (2) namesto B vstavimo B^*B , dobimo

$$\text{Ker } (B^*B)^2 = \text{Ker } B^*B. \quad (3)$$

Če v formulo (2) namesto B vstavimo B^2 , dobimo

$$\text{Ker } (B^2)^*B^2 = \text{Ker } B^2. \quad (4)$$

Ker je B normalna preslikava, velja

$$(B^2)^*B^2 = B^*B^*BB = B^*BB^*B = (B^*B)^2. \quad (5)$$

Lastnost (1) sledi iz formul (2)-(5). □

Izrek

Lastni podprostori normalne matrike so paroma ortogonalni.

Dokaz: Recimo, da je A normalna matrika in da sta λ in μ različni lastni vrednosti za A . Radi bi pokazali, da je vsak vektor $u \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ pravokoten na vsak vektor $v \in \text{Ker}(A - \mu I)$ glede na standardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$.

Dokazali smo že, da velja $\text{Ker}(A - \mu I) = \text{Ker}(A^* - \bar{\mu}I)$, torej je

$$\mu \langle u, v \rangle = \langle u, \bar{\mu}v \rangle = \langle u, A^*v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle.$$

Ker je $\mu \neq \lambda$, odtod sledi $\langle u, v \rangle = 0$, kar smo želeli dokazati. □

Sedaj lahko povemo še več o diagonalizaciji normalnih matrik.

Izrek

Matrika A je normalna natanko tedaj, ko obstajata taka diagonalna matrika D in taka unitarna matrika P , da velja $A = PDP^{-1}$.

Dokaz: Če je $A = PDP^{-1}$, kjer je D diagonalna in P zadošča $P^{-1} = P^*$, potem velja

$$A^*A = (PDP^*)^*PDP^* = PD^*P^*PDP^* = PD^*DP^*$$

in

$$AA^* = PDP^*(PDP^*)^* = PDP^*PD^*P^* = PDD^*P^*.$$

Ker je $D^*D = DD^*$, sledi $A^*A = AA^*$.

Privzemimo sedaj, da je A normalna $n \times n$ matrika. Vemo, da je vsota vseh lastnih podprostorov matrike A enaka $\mathbb{C}^n$ in da so lastni podprostorji paroma pravokotni glede na standardni skalarni produkt. Če za vsak lastni podprostor izberemo ortonormirano bazo, potem je unija teh baz ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$. Označimo to ortonormirano bazo z $v_1, \dots, v_n$. Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pripadajoče lastne vrednosti. Označimo

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ker je $v_1, \dots, v_n$ ortonormirana baza glede na standardni skalarni produkt, je

$$P^*P = I.$$

Ker so $v_1, \dots, v_n$ lastni vektorji z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, je

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} = PD.$$

Oglejmo si še normalne preslikave in njihovo zvezo z normalnimi matrikami.

Definicija

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom. Linearna preslikava $L: V \rightarrow V$ je normalna, če velja $L^*L = LL^*$.

Trditev

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom in $\mathcal{B}$ ortonormirana baza za V . Potem je linearna preslikava $L: V \rightarrow V$ normalna natanko tedaj, ko je njena matrika $[L]_{\mathcal{B}}$ normalna.

Dokaz: Vemo, da velja $[L^*]_{\mathcal{B}} = ([L]_{\mathcal{B}})^*$. Odtod sledi, da je $[L^*L]_{\mathcal{B}} = [L^*]_{\mathcal{B}}[L]_{\mathcal{B}} = ([L]_{\mathcal{B}})^*[L]_{\mathcal{B}}$ in $[LL^*]_{\mathcal{B}} = [L]_{\mathcal{B}}[L^*]_{\mathcal{B}} = [L]_{\mathcal{B}}([L]_{\mathcal{B}})^*$. Torej velja $([L]_{\mathcal{B}})^*[L]_{\mathcal{B}} = [L]_{\mathcal{B}}([L]_{\mathcal{B}})^*$ natanko tedaj, ko je $[L^*L]_{\mathcal{B}} = [LL^*]_{\mathcal{B}}$. Slednje velja natanko tedaj, ko je $L^*L = LL^*$. □

Opomba: Naš glavni izrek za normalne matrike lahko povemo tudi takole: Linearna preslikava $L: V \rightarrow V$ je normalna natanko tedaj ko obstaja taka ortonormirana baza $\mathcal{B}$ za V , da je matrika $[L]_{\mathcal{B}}$ diagonalna. (Velja nad $\mathbb{C}$.)

8. Izometrije

Izometrije so preslikave, ki ohranjajo razdaljo. Ker razdaljo definiramo z normo, jih definiramo kot linearne preslikave, ki ohranjajo normo.

Definicija izometrije

Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostora s skalarnim produktom. Pravimo, da je linearna preslikava $L: U \rightarrow V$ **izometrija**, če za vsak $u \in U$ velja

$$\|Lu\|_V = \|u\|_U.$$

Opomba: Vsaka izometrija je injektivna, saj iz $Lu = 0$ in iz $\|Lu\| = \|u\|$ sledi $u = 0$. Izometrija je surjektivna natanko tedaj, ko je $\dim U = \dim V$.

Primer izometrije, ki ni surjektivna

Preslikava $L: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^5$, kjer $L(x, y) = (x, y, 0, 0, 0)$ je izometrija, če sta $\mathbb{C}^2$ in $\mathbb{C}^5$ opremljena s standardnim skalarnim produktom.

Opomba: Kadar je $V = U$ pravimo izometriji tudi unitarna linearna preslikava. Vsaka unitarna linearna preslikava je bijektivna.

Oglejmo si najprej nekaj karakterizacij izometrij.

Trditve

Za linearno preslikavo $L: U \rightarrow V$, kjer sta U in V končnorazsežna vektorska prostora s skalarnim produktom, so ekvivalentne trditve:

- 1 L je izometrija
- 2 $\langle Lu, Lu' \rangle_V = \langle u, u' \rangle_U$ za vsaka $u, u' \in U$
- 3 $L^*L = \text{id}_U$ (identična preslikava na U)
- 4 Za vsako ortonormirano bazo $u_1, \dots, u_n$ v U je $Lu_1, \dots, Lu_n$ ortonormirana množica v V .
- 5 Za neko ortonormirano bazo $u_1, \dots, u_n$ v U je $Lu_1, \dots, Lu_n$ ortonormirana množica v V .

Opomba: Te karakterizacije seveda veljajo tudi za unitarne linearne preslikave, saj so te posebni primeri izometrij.

Dokaz: Dokažimo najprej ekvivalenco med (1) in (2). Če velja (2), potem je $\|Lu\|^2 = \langle Lu, Lu \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$ za vsak $u \in U$, torej je L izometrija. Recimo, da je L izometrija. V kompleksnem primeru velja

$$\begin{aligned}\langle Lu, Lu' \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|Lu + i^k Lu'\|^2 \\&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|L(u + i^k u')\|^2 \\&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|u + i^k u'\|^2 \\&= \langle u, u' \rangle.\end{aligned}$$

Torej L zadošča (2). Podobno velja tudi v realnem primeru, samo drugo polarizacijsko identiteto uporabimo.

Dokažimo sedaj ekvivalenco med (2) in (3). Če velja (3), potem je

$$\langle Lu, Lu' \rangle = \langle u, L^* Lu' \rangle = \langle u, \text{id}_U u' \rangle = \langle u, u' \rangle$$

za vsaka $u, u' \in U$. Torej velja (2). Obratno, če velja (2), potem je

$$\langle u, L^* Lu' - u' \rangle = \langle u, L^* Lu' \rangle - \langle u, u' \rangle = \langle Lu, Lu' \rangle - \langle u, u' \rangle = 0$$

za vsaka $u, u' \in U$. Če vstavimo $u = L^* Lu' - u'$, dobimo, da je $L^* Lu' = u'$ za vsak $u' \in U$. Torej velja (3).

Očitno iz (2) sledi (4) in iz (4) sledi (5). Dokažimo še, da iz (5) sledi (1).

Naj bo $u_1, \dots, u_n$ taka ortonormirana baza za U , da je $Lu_1, \dots, Lu_n$ ortonormirana množica v V . Vzemimo poljuben element $u \in U$ in ga razvijmo po ortonormirani bazi; recimo $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Po Parsevalovi identiteti velja $\|u\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$. Podobno iz $Lu = \alpha_1 Lu_1 + \dots + \alpha_n Lu_n$ in ortonormiranosti $Lu_1, \dots, Lu_n$ sledi, da je $\|Lu\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$. Torej je $\|Lu\| = \|u\|$ za vsak $u \in U$. □

Kaj lahko povemo o matriki izometrije?

Trditev

Naj bosta U, V končnorazsežna vektorska prostora s skalarnim produktom. Naj bo $\mathcal{B}$ ortonormirana baza za U in naj bo $\mathcal{C}$ ortonormirana baza za V . Potem je linearna preslikava $L: U \rightarrow V$ izometrija natanko tedaj, ko za njeno matriko $A = [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ velja $A^* A = I$.

Dokaz: Vemo, da je linearna preslikava $L: U \rightarrow V$ izometrija natanko tedaj, ko je $L^* L = \text{id}_U$. Očitno to velja natanko tedaj, ko je $[L^* L]_{\mathcal{B}} = I$. Upoštevajmo še, da je $[L^* L]_{\mathcal{B}} = [L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ in $[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = ([L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^*$. Torej je L izometrija natanko tedaj, ko je $([L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^* ([L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}) = I$. $\square$

Opomba: Če ortonormirani bazi $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ spretno izberemo, se matrika izometrije zelo poenostavi. Izberimo tako ortonormirano bazo $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ v U , da je $v_1 = Lu_1, \dots, v_n = Lu_n$ ortonormirana množica v V . Naj bo $v_{n+1}, \dots, v_m$ njena dopolnitev do ortonormirane baze $\mathcal{C}$ za V . Potem je matrika $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ oblike $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$.

Trditev

Za pravokotno kompleksno matriko A velja $A^*A = I$ natanko tedaj, ko so stolpci A ortonormirana množica glede na standardni skalarni produkt.

Dokaz: Naj bodo $v_1, \dots, v_n$ stolpci matrike A . Potem velja

$$A^*A = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^*v_1 & \dots & v_1^*v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^*v_1 & \dots & v_n^*v_n \end{bmatrix}$$

kjer je $v_j^*v_i = \langle v_i, v_j \rangle$ standardni skalarni produkt. Odtod sledi, da velja $A^*A = I$ natanko tedaj, ko je

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{če } i = j \\ 0 & \text{če } i \neq j \end{cases}$$

torej natanko tedaj, ko je $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormirana množica glede na standardni skalarni produkt. □

Naše ugotovitve o matrikah izometrij povzemimo v naslednjo trditev:

Trditev

Za vsako kompleksno $m \times n$ matriko A , kjer je $m \geq n$, so ekvivalentne naslednje trditve:

- 1 $A^*A = I$.
- 2 Stolpci matrike A so ortonormirana množica v $\mathbb{C}^m$ glede na standardni skalarni produkt.
- 3 Linearna preslikava $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, v \mapsto Av$ je izometrija.
- 4 Obstaja taka izometrija $L: U \rightarrow V$, kjer $\dim U = n$ in $\dim V = m$, in taki ortonormirani bazi $\mathcal{B}$ za U in $\mathcal{C}$ za V , da velja $A = [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.
- 5 Obstaja taka unitarna $m \times m$ matrika P in taka unitarna $n \times n$ matrika Q , da velja $A = P \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} Q$.

9. Ortogonalne in unitarne matrike

Začnimo kar z definicijo.

Definicija ortogonalne matrike in unitarne matrike

Naj bo A kompleksna kvadratna matrika, ki zadošča $A^*A = I$. Potem pravimo, da je A **unitarna** matrika. Realni unitarni matriki pravimo tudi **ortogonalna** matrika.

Opomba: Vemo, da za kvadratne matrike iz lastnosti $A^*A = I$ sledi $AA^* = I$. Odtod sledijo naslednje preproste lastnosti unitarnih matrik:

- Vsaka unitarna matrika je normalna.
- Vsaka unitarna matrika A je obrnljiva in zadošča $A^{-1} = A^*$.
- Če je A unitarna matrika, potem je tudi A^* unitarna matrika.

Opomba: Dokazali smo že, da je kvadratna matrika unitarna natanko tedaj, ko njeni stolpci tvorijo ortonormirano bazo glede na standardni skalarni produkt. To nam da veliko primerov unitarnih matrik.

Primer: Klasifikacija ortogonalnih 2×2 matrik

Za vsak realen φ sta matriki

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

ortogonalni. Vsaka ortogonalna 2×2 matrike je ene od teh dveh oblik.

Dokaz: Obe matriki sta realni, kvadratni in zadoščata $A^*A = I$, torej sta ortogonalni. Če je matrika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ortogonalna, potem velja $A^T A = I$, se pravi

$$\begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz $a^2 + c^2 = 1$ sledi, da obstaja tak realen φ , da velja $a = \cos \varphi$ in $c = \sin \varphi$. Podobno iz $b^2 + d^2 = 1$ sledi, da obstaja tak realen ψ , da je $b = \cos \psi$ in $d = \sin \psi$. Iz $ab + cd = 0$ potem sledi, da je

$$\cos(\psi - \varphi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = ab + cd = 0.$$

Odtod sledi, da je $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Torej je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi + \varphi) \\ \sin \varphi & \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi + \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -(-1)^k \sin \varphi \\ \sin \varphi & (-1)^k \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Za sode k dobimo prvo matriko, za lihe k pa drugo matriko. □

Unitarne matrice imajo zanimivo algebraično strukturo.

Trditev

Množica vseh unitarnih $n \times n$ matrik je grupa za matrično množenje.

Dokaz: Če sta A in B unitarni matriki, potem velja

$$(AB)^*(AB) = (B^*A^*)(AB) = B^*(A^*A)B = B^*IB = B^*B = I,$$

torej je tudi AB unitarna matrika. Če je A unitarna matrika, potem velja $A^{-1} = A^*$. Odtod sledi

$$(A^{-1})^*A^{-1} = (A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I,$$

torej je tudi A^{-1} unitarna matrika. □

Za vsak obseg F označimo z $GL(n, F)$ grupo vseh obrnljivih $n \times n$ matrik z elementi iz F . Tej grupi pravimo **splošna linearna grupa**. Grupo vseh $n \times n$ matrik nad F z determinanto 1 označimo z $SL(n, F)$ in ji pravimo **specialna linearna grupa**.

Grupo vseh unitarnih $n \times n$ matrik označimo z $U(n)$ in ji pravimo **splošna unitarna grupa**. Grupo vseh unitarnih $n \times n$ matrik z determinanto 1 označimo z $SU(n)$ in ji pravimo **specialna unitarna grupa**.

Grupo vseh ortogonalnih $n \times n$ matrik označimo z $O(n)$ in ji pravimo **splošna ortogonalna grupa**. Grupo vseh ortogonalnih $n \times n$ matrik z determinanto 1 označimo z $SO(n)$ in ji pravimo **specialna ortogonalna grupa**. Grupi $O(2)$ in $SO(2)$ smo eksplicitno izračunali.

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{C}) & \supset & U(n) \\ \cup & & \cup \\ SL(n, \mathbb{C}) & \supset & SU(n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{R}) & \supset & O(n) \\ \cup & & \cup \\ SL(n, \mathbb{R}) & \supset & SO(n) \end{array}$$

Kaj vemo o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih unitarnih matrik?

Trditev

Lastne vrednosti unitarne matrike imajo absolutno vrednost 1.

Prvi dokaz: Naj bo λ lastna vrednost za unitarno matriko A in naj bo v pripadajoči lastni vektor. Ker je $A^*A = I$, velja

$$\langle v, v \rangle = \langle v, I v \rangle = \langle v, A^* A v \rangle = \langle A v, A v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Ker je $v \neq 0$, lahko krajšamo $\langle v, v \rangle$ in dobimo $1 = \lambda \bar{\lambda}$.

Drugi dokaz: Ker je vsaka unitarna matrika normalna, ima faktorizacijo $A = P D P^{-1}$, kjer je D diagonalna in P unitarna matrika. Odtod sledi

$$D^* D = (P^* A P)^* (P^* A P) = P^* A^* P P^* A P = P^* A^* A P = P^* P = I.$$

Torej imajo diagonalni elementi matrike D absolutno vrednost 1. Toda diagonalni elementi matrike D so ravno lastne vrednosti matrike A .

Primer

Vemo, da sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$$

ortogonalni za vsak φ . Lastni vrednosti matrike A sta $\cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Lastni vrednosti matrike B sta ± 1 .

O lastnih vektorjih ne moremo povedati nič novega.

Trditev

Različnim lastnim vrednostim unitarne matrike pripadata ortogonalna lastna vektorja.

Prvi dokaz: Vsaka unitarna matrika je normalna in za normalne matrike smo to že dokazali.

Drugi dokaz: Naj bo $Au = \lambda u$ in $Av = \mu v$ in $\lambda \neq \mu$. Ker je A unitarna, je $\lambda \bar{\mu} \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, \mu v \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle u, A^* Av \rangle = \langle u, v \rangle$. Poleg tega iz $\lambda \neq \mu$ in $\lambda \bar{\lambda} = \mu \bar{\mu} = 1$ sledi, da je $\lambda \bar{\mu} \neq 1$. Odtod sledi $\langle u, v \rangle = 0$.