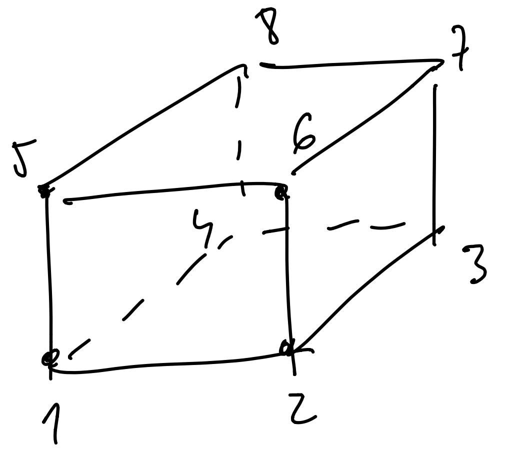
„Lepo" risanje grafov (diskretnih objektov) v 3D

Def.: Neusmerjeni graf G je par (V, E), kjer je V množica vozlišč, $E \subseteq V \times V$ pa množica povezav.

Primer: $V = \{1, 2, \ldots, 8\}$, E pa množica povezav na sliki:



$$E = \{(1,2), (2,3), \ldots\}$$

$$\# E = 12$$

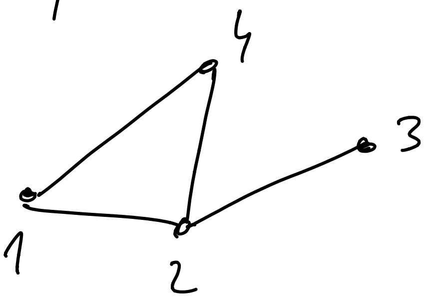
Reprezentacija grafa z matriko sosednosti:

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}; \quad E = \{(i,j);\ i \in V_1 \subseteq V,\ j \in V_2 \subseteq V\}$$

Definiramo matriko: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{če sta } i \text{ in } j \text{ povezana,} \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Primer:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrika sosednosti}$$

Kako lahko A uporabimo za risanje grafa v $\mathbb{R}^3$?

Privzemimo, da je graf G kubičen (vsaka točka ima natanko 3 sosede)

V vsaki vrstici matrike A so natanko 3 enke, zato je

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \text{ je lastna vrednost!!!}$$

Ker je A realna simetrična matrika, ima n realnih vrednosti:

$$\lambda_1 = 3 \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Ima tudi n ortogonalnih lastnih vektorjev!

Naj bodo x_2, x_3, x_4 normirani (v $\|\cdot\|_2$) lastni vektorji, ki pripadajo lastnim vrednostim λ_2, λ_3 in λ_4:

$$x_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}; \quad j = 2, 3, 4.$$

Če za koordinate točk grafa izberemo

$$T_i = (x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}) \in \mathbb{R}^3, \; i = 1, 2, \dots, n$$

ter narišemo ustrezno graf, dobimo „lepo" sliko grafa.