LINEARNA ALGEBRA 2020/21
27. VAJE: 5. 5. 2021

1. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ in $A\colon V \to V$ endomorfizem. Pokaži, da je $A = 0$ natanko tedaj, ko je $\langle Ax, x\rangle = 0$ za vse $x \in V$. Pokaži, da trditev ne velja za vektorske prostore nad $\mathbb{R}$.

2. Naj bo A preslikava, za katero je za vsak invarianten podprostor U invarianten tudi $U^\perp$. Pokaži, da je A normalen.

3. Naj bo $A = (a_{ij})$ hermitska matrika in λ njena največja lastna vrednost. Pokaži, da je $\lambda \geq a_{ii}$ za vsak i.

4. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $v_1, \dots v_n \in V$ vektorji. Naj bo $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ matrika, kjer je $g_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$.

   Pokaži, da je G pozitivno semidefinitna.

   Pokaži, da je G pozitivno definitna, če so vektorji $v_1, \dots, v_n$ linearno neodvisni.

5. Naj bo $A = (a_{ij})$ pozitivno semidefinitna matrika. Pokaži, da je

$$a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}^2.$$

   Kaj lahko poveš o matriki, če je $a_{ii} = 0$.

6. Izračunaj singularni razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ in $A\colon V \to V$ endomorfizem. Pokaži, da je $A = 0$ natanko tedaj, ko je $\langle Ax, x\rangle = 0$ za vse $x \in V$. Pokaži, da trditev ne velja za vektorske prostore nad $\mathbb{R}$.

Če je $\langle Ax, x\rangle = 0$, za vsak $x \in V$, potem je

$$\langle A(\alpha x + \beta y), \alpha x + \beta y\rangle = 0 \quad \text{za } \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad x, y \in V$$

$$\langle A(\alpha x + \beta y), \alpha x + \beta y\rangle = \underbrace{\langle A\alpha x, \alpha x\rangle}_{=0} + \langle A\alpha x, \beta y\rangle + \langle A\beta y, \alpha x\rangle + \underbrace{\langle A\beta y, \beta y\rangle}_{=0} = 0$$

$$\alpha\bar{\beta}\langle Ax, y\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle Ay, x\rangle = 0$$

① $\alpha = \beta = 1 \rightarrow \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = 0$

$\alpha = 1 \quad \beta = i \rightarrow -i\langle Ax, y\rangle + i\langle Ay, x\rangle = 0$

$$\left.\begin{aligned} \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle &= 0 \\ -\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle &= 0 \end{aligned}\right\} + \quad 2\langle Ay, x\rangle = 0$$

$$-2\langle Ax, y\rangle = 0$$

$$\langle Ax, y\rangle = 0 \quad \forall x, y \in V \rightarrow A = 0$$

$\boxed{\text{Nad } \mathbb{R}}$ $\langle Ax, x\rangle = 0$ → slika vektorja je pravokotna na vektor.

Še vedno je $\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = 0$

$$\langle Ax, y\rangle + \langle A^* x, y\rangle = 0$$

$$\langle (A+A^*)x, y\rangle = 0 \rightsquigarrow A + A^* = 0 \to A = -A^*$$

A je antisimetrična

Primer $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A$ — rotacija za $\pi/2$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= ba - ab = 0$$

2. Naj bo A preslikava, za katero je za vsak invarianten podprostor U invarianten tudi $U^{\perp}$. Pokaži, da je A normalna

A normalna $\iff$ ima (nad $\mathbb{C}$) diagonalizacijo v ortonormirani bazi

$A: V \to V$

Indukcija na dimenzijo V.

$n=1$ ✓

Privzamemo da velja za $\dim V \leq n$.

(Če je $A: V \to V$ $\dim V < n$, za katero je za vsak invariantni podprostor U invarianten tudi $U^{\perp}$, potem je A normalen)

$\dim V = n+1$ $\qquad A: V \to V$

A ima lastni vektor u_1 z lastno vrednostjo λ_1.

Vektor normiramo $\|u_1\| = 1$.

$\underbrace{\operatorname{lin}\{u_1\}}_{U_1}$ je invarianten podprostor $\to$ $\underbrace{\operatorname{lin}\{u_1\}^{\perp}}_{V_1}$ je invarianten

A lahko zožimo na V_1 $\qquad A|_{V_1}: V_1 \to V_1$

$A|_{V_1}$ ima lastnost iz navodil.

Naj bo U invarianten za $A|_{V_1}$, potem je U invarianten za A.

Potem je $U^{\perp V}$ invarianten za A. Potem je $U^{\perp V} \cap V_1$ invarianten za A.

ortogonalni komplement znotraj V.

Izračun pokaže, da je $U^{\perp V} \cap V_1 = U^{\perp V_1}$, invarianten tudi za $A|_{V_1}$.
ort. komplement znotraj V_1

$\to$ $A|_{V_1}$ je normalna. $\to$ Obstaja ortonormirana baza B_1, v kateri je $[A|_{V_1}]_{B_1}$ diagonalna matrika D. Baza $B = \{v\} \cup B_1$ je ortonormirana in $[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & D \end{bmatrix}$. $\to$ A je normalna.

3. Naj bo $A = (a_{ij})$ hermitska matrika in λ njena največja lastna vrednost. Pokaži, da je $\lambda \geq a_{ii}$ za vsak i.

standardni skalarni produkt

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \lambda$$

A - hermitska $\rightarrow$ ima diagonalizacijo v ortonormirani bazi $\{b_i\}_{i=1}^{n}$

$$Ab_i = \lambda_i b_i$$

Vstavimo

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ab_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle b_i, b_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \overline{\alpha_i} \overset{\lambda_i \leq \lambda}{\leq} \lambda \sum \alpha_i \overline{\alpha_i}$$

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i}$$

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i}} = \lambda$$

Za x vstavimo e_i

$$\boxed{a_{ii} = \langle Ae_i, e_i\rangle \leq \lambda}$$

4. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $v_1, \dots v_n \in V$ vektorji. Naj bo $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ matrika, kjer je $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

Pokaži, da je G pozitivno semidefinitna.

Pokaži, da je G pozitivno definitna, če so vektorji $v_1, \dots, v_n$ linearno neodvisni.

P – pozitivno definitna

– $P^* = P$ in $\langle Px, x \rangle > 0$ za vsak $x \in V$, $x \neq 0$

P – pozitivno semidefinitna

$P^* = P$ in $\langle Px, x \rangle \geq 0$ za vsak $x \in V$

$$G = (g_{ij})_{i=1}^{n} \in M_n(\mathbb{C}) \qquad g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

↪ Gramova matrika

G – pozitivno semidefinitna

$$G^H = G$$

$$G^H = (\overline{g_{ji}})_{i=1}^n = (g_{ij})_{i=1}^n \qquad \overline{g_{ji}} = \overline{\langle v_j, v_i \rangle} = \langle v_i, v_j \rangle = g_{ij}$$

✓

$$\langle Ge_i, e_j \rangle = g_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{i1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{in} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\langle Gx, x \rangle} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} G \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle$$

$$x = \sum \alpha_i e_i \quad = \sum_{i,j=1}^{n} \sum \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle G e_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \, g_{ij} = \sum_{j,i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \alpha_i v_i, \alpha_j v_j \rangle = \underline{\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle} \geq 0.$$

- Če so v_i – linearno neodvisni

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle > 0 \quad \text{če} \quad \underline{(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)}$$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \neq 0$ zaradi lin neodvisnosti.

- G pozitivno definitna $\Rightarrow$ $\{v_1 \dots v_n\}$ lin neodvisni

$$\underline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \iff \alpha_1 \dots \alpha_n = 0}$$

$$\left\langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i v_i \right\rangle > 0 \quad \text{če} \quad (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0, \dots, 0) \; \checkmark$$

$\langle\, ,\, \rangle : \underline{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}}$ $\quad \mathbb{C}\, v_1 \ldots v_n$, $\quad e_1 \ldots e_n$

$\langle\, ,\, \rangle_S : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \qquad G = (g_{ij}) \qquad g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

$$\langle x, y \rangle = \langle Gx, y \rangle_S$$

5. Naj bo $A = (a_{ij})$ pozitivno semidefinitna matrika. Pokaži, da je

$$\underline{a_{ii}a_{jj} \geq |a_{ij}|^2}$$

Kaj lahko poveš o matriki, če je $a_{ii} = 0$.

Ideja A - pozitivno definitna

$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \underline{\langle u, u \rangle} \cdot \langle v, v \rangle$ za vsak skalarni produkt in u, v

$|a_{ij}|^2 \qquad a_{ii} \qquad a_{jj}$

$\langle\, ,\, \rangle$ - standarden skal. prod. na $\mathbb{C}^n$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle_A$$

$$\underline{\langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ij}} = \langle e_i, e_j \rangle_A$$

CS - neenakost

$$|\langle e_i, e_j \rangle_A|^2 \leq \langle e_i, e_i \rangle_A \cdot \langle e_j, e_j \rangle_A$$

$$\underline{|a_{ij}|^2 \leq a_{ii} \cdot a_{jj}}$$

- A – pozitivno $\overline{\text{semidefinitna}}$

CS še vedno velja (– linearnost in enakost)

$$|a_{ij}|^2 \leq a_{ii} \cdot a_{jj}$$

kaj če je $a_{ii} = 0$ $\quad |a_{ij}|^2 = 0$

$$|a_{ji}|^2 = 0 \quad \forall i, j$$

i-ti stolpec in vrstica sta ničelni.

6. Izračunaj singularni razcep matrike $m=2 \quad n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}. \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$A = U \Sigma V^H$$

U, V – unitarni

Σ – diagonalna pravokotna matrika s pozitivnimi elementi

→ singularne vrednosti

koreni lastnih vrednosti AA^T

$U \in \mathbb{C}^{m \times m}$

$\Sigma \in \Sigma^{m \times n}$

$V \in \mathbb{C}^{n \times n}$

- stolpci matrike U so ON lastni vektorji matrike AA^T,
- stolpci V so ortonormirani lastni vektorji A^TA
- Σ – singularne vrednosti urejene po velikosti

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$p_{AA^T} = (x-17)^2 - 8 \cdot 8 = (x-25)(x-9)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

– ima lastne vrednosti $25, 9, 0$

$$\begin{bmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \quad 5-3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -17 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cancel{u_1}\, v_1 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

Preverimo še, da je

$$v_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$A v_1 = 5 u_1$ sicer vzamemo $-v_1$

$A v_2 = 3 u_2$ -||- $-v_2$

lastni vektor za 0

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -2/3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & 2/3 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T.$$

Postopek deluje samo, če ima A različne sing. vrednosti.