

1. Poiščite vse podgrupe grupe S_3 . Katere so edinke?

2. Naj bo $H = \{\pi \in S_4; \pi(4) = 4\}$. Pokaži, da je H podgrupa grupe S_4 . Ali je H podgrupa edinka grupe S_4 ? Poiščite leve odseke grupe S_4 po podgrupi H .

3. Dane so množice funkcij

$$G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a > 0\},$$
$$T = \{f \in G; f(x) = x + b\}$$

(a) Pokažite, da je G z operacijo komponiranja funkcij grupa.

(b) Pokažite, da je T podgrupa edinka grupe G in določite desne odseke grupe G po podgrupi T .

4. Naj bo $G = D_{2n}$ diederska grupa za $n = 4$.

(a) Poiščite vse podgrupe edinke grupe D_8 .

(b) Katera je center grupe?

(c) Kateri znani grupi je izomorfna grupa $D_8/Z(D_8)$?

5. Naj bo $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ kvaternionska grupa, kjer je množenje definirano kot $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ in $ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$. Kateri grupi je izomorna kvocientna grupa Q_8 po centru?

6. Naj bo G grupa, K in N podgrupi edinki v G . Pokažite, da sta potem $N \cap K$ in NK podgrupi edinki v G .

Domača naloga

7. Naj bo G grupa in H njena podgrupa. Pokažite, da je H podgrupa edinka natanko tedaj, ko za vsak $a \in G$ velja $aH = Ha$.

8. Naj bo G grupa in H njena podgrupa indeksa 2. Pokažite, da je H podgrupa edinka.

9. Pokažite, da je grupa A_n podgrupa edinka grupe S_n .

10. Z A_4 označimo množico vseh sodih permutacij iz S_4 .

- (a) Pokažite, da je A_4 grupa za operacijo množenja permutacij.
- (b) Naštejte vse elemente grupe A_4 .
- (c) Poiščite vse podgrupe grupe A_4 .
- (d) Katere od podgrup grupe A_4 so podgrupe edinke? Določite konjugiranostne razrede podgrup grupe A_4 .
- (e) kateri grupi je izomorfnna grupa A_4/H ?

11. Naj bo A_5 grupa vseh sodih permutacij množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- (a) Koliko elementov ima grupa A_5 ?
- (b) Zapišite vse možne rede elementov grupe A_5 in za vsak možen red r poiščite predstavnika, ki ima red r .
- (c) Zapišite vse elemente reda 2. Ali skupaj z enoto tvorijo grupo?

12. Dane so množice

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \right\},$$
$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R}, x > 0 \right\} \quad \text{in}$$
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pokažite, da je G grupa za operacijo množenja matrik in K, H njeni podgrupi. Pokažite, da K ni podgrupa edinka. Pokažite, da H je podgrupa edinka. Pokažite, da je grupa G/H izomorfnna grupi $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.