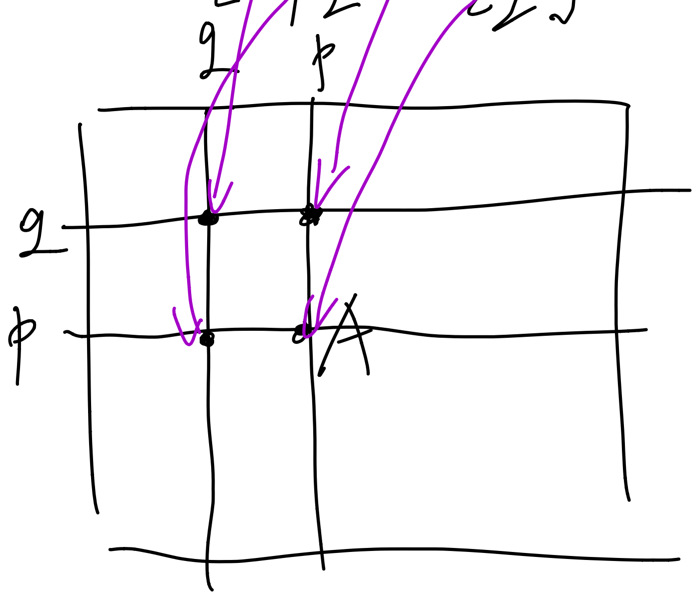
Jacobijeva iteracija

- Matrike ne reduciramo na tridiagonalno.
- Z množenji z Givensovimi rotacijami z leve in desne poskušamo matriko spremeniti v diagonalno.
- Če želimo „uničiti" element (p,q) v A, poiščemo Givensovo rotacijo:

$$R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix},$$

da bo

$$R^T \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$



Izkaže se, da je

$$c = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}}, \quad s = ct,$$

kjer je

$$t = \frac{\operatorname{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1+\tau^2}}, \quad \tau = \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}}$$

<u>Definicija</u>: Za $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiramo

$$\operatorname{off}(A) = \sqrt{\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{jk}|^2}.$$

<u>Lema</u>: Če je matrika A' dobljena iz A z enim korakom Jacobijeve metode na elementu (p,q), je

$$\operatorname{off}(A')^2 = \operatorname{off}(A)^2 - 2a_{pq}^2.$$

Variante Jacobijeve iteracije:

- <u>Klasična varianta</u>: uničujemo po abs. vrednosti največji izvendiag. el.
- <u>Ciklična varianta</u>: vedno v enakem vrstnem redu zaporedoma vse izven diagonale.
- <u>Pragovna varianta</u>: uničujemo v enakem vrstnem redu, ampak samo elemente, ki so po abs. vrednosti nad predpisano mejo (pragom).

<u>Polinomska interpolacija</u>

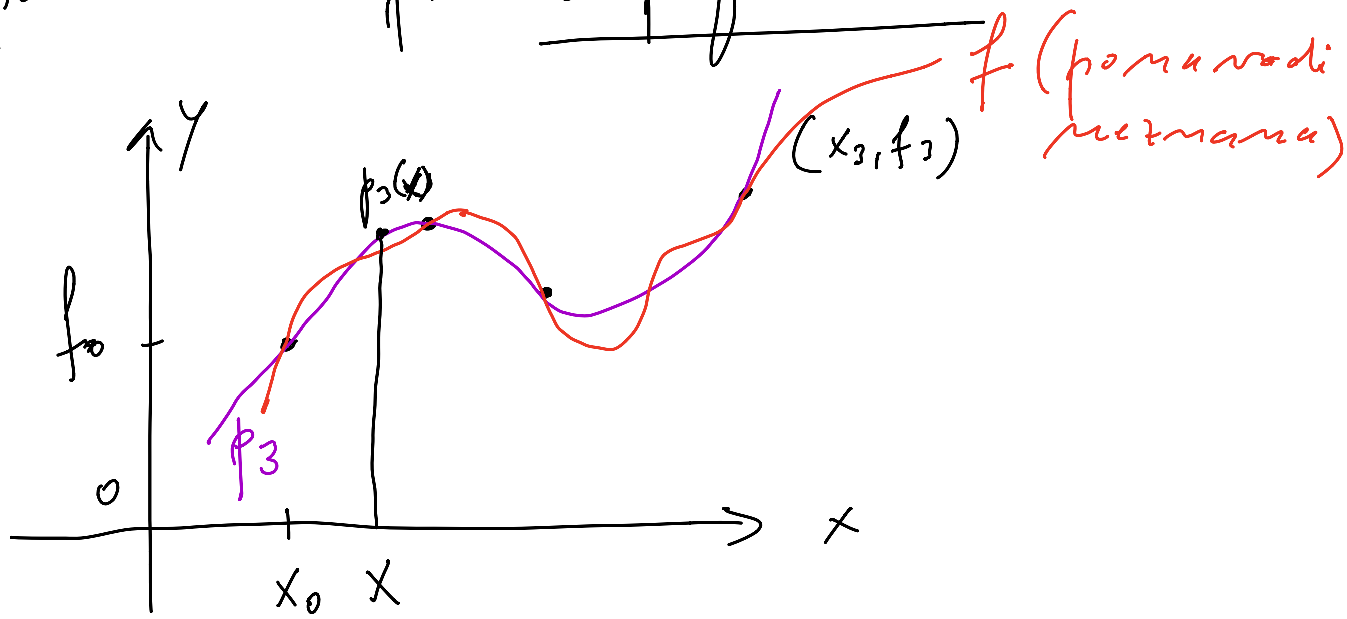
<u>Osnovni problem interpolacije</u>:

podane so vrednosti f_i, $i=0,1,\dots,n$, v paroma različnih točkah x_i, $i=0,\dots,n$. Iščemo <u>polinom</u> p najnižje možne stopnje, za katerega je

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Takemu polinomu rečemo <u>interpolacijski</u> polinom!

<u>Lema</u>: Za podatke (x_i, f_i), $i = 0, 1, \dots, n$, kjer so x_i paroma različne točke, obstaja <u>natanko en</u> interpolacijski polinom p_n <u>stopnje $\leq n$</u>.



- Interpolacijski polinom lahko uporabimo za izračun vrednosti pri $x \neq x_i$.

- Namesto polinoma lahko uporabimo kakšno druge funkcijo:

$$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$g_3(x) = a_3 \sin x + a_2 e^{-x} + a_1 x + a_0 \frac{1}{x}$$

- Če je n velik, potem imamo numerične težave!!!

- Alternativa je uporaba polinomov nizkih stopenj, ki jih lepimo → zlepki (splines)

Klasična oblika interp. polinoma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$p_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0$$

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1$$

$$\vdots$$

$$a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n$$

$$\Rightarrow \quad Va = f,$$

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Sistem ima natanko eno rešitev $\Leftrightarrow$ $\det V \neq 0$.

$x_i \neq x_j,\ i \neq j$

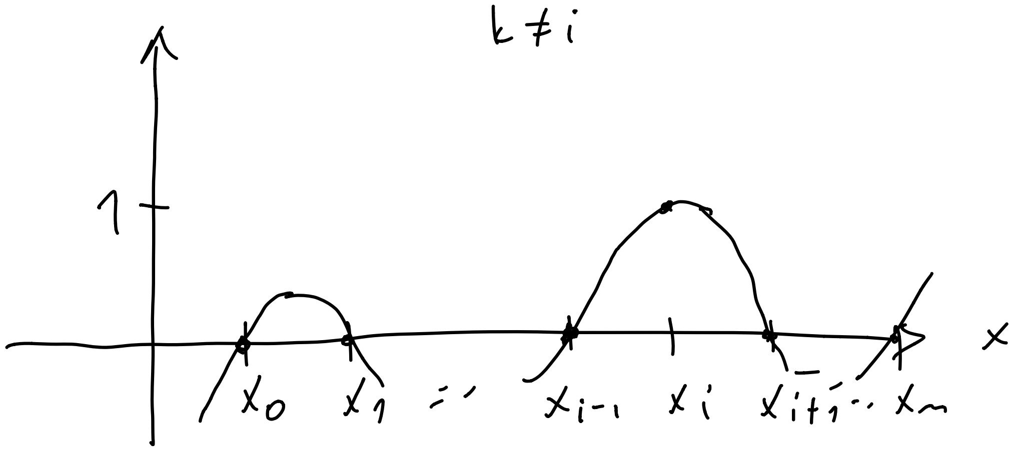
<u>Velja</u>: $\det V = \prod_{i<j} (x_i - x_j) \neq 0$

Časovna zahtevnost $O(n^3)$.

Lagrangeova oblika

Izberimo bazo Lagrangeovih polinomov:

$$\ell_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$



Iščemo polinom $l_{n,i}$, za katerega

je $l_{n,i}(x_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckerjev delta)

$$\Rightarrow l_{n,i}(x) = C(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$

$$l_{n,i}(x) = C \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x-x_k)$$

Toda $l_{n,i}(x_i) = 1 = C \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}}$$

Definiramo:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, l_{n,j}(x).$$

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, l_{n,j}(x_i)$$

$$= f_i \, l_{n,i}(x_i) = f_i \, , \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Časovna zahtevnost je $O(n^2)$.