

ANALIZA 1
29. domača naloga

- (1) Na množico $M = \mathbb{R}^2$ vpeljemo predpis:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_2 - x_1| & ; y_1 = y_2, \\ |x_2 - x_1| + |y_1| + |y_2| & ; y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

- (a) Pokaži, da je d metrika.
(b) Skiciraj zaprti krogli $\overline{K}((0, 1), 1)$ in $\overline{K}((0, 1), 2)$.

- (2) Naj bo $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ in $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom:

$$d(m, n) = \begin{cases} |1/n - 1/m|, & n \neq \infty, m \neq \infty, \\ 1/n, & n \neq \infty, m = \infty, \\ 1/m, & n = \infty, m \neq \infty, \\ 0, & n = \infty, m = \infty. \end{cases}$$

- (a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.
(b) Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $r > 0$, da je $K(n, r) = \{n\}$. Pokaži tudi, da za vsak $r > 0$ kroglja $K(\infty, r)$ vsebuje vse razen končno mnogo elementov M .

- (3) Naj bo (M, d) metrični prostor. Definirajmo

$$\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Pokaži, da je tudi $\bar{d}$ metrika na množici M .

- (4) Naj bo (M, d) metrični prostor. Razdaljo med pravima nepraznima podmnožicama A in B prostora M definiramo s predpisom

$$D(A, B) = \inf_{(a, b) \in A \times B} d(a, b).$$

Ali je s predpisom D definirana metrika na množici $P(M) \setminus \{\emptyset, M\}$, kjer je $P(M)$ potenčna množica množice M ?

Ne. Kot primer vzemimo množico $M = \{a, b, c\}$ s poljubno metriko d . Podmnožici $A = \{a\}$ in $B = \{a, b\}$ sta potem različni, a velja $D(A, B) = 0$.

- (5) Na množico $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ vpeljemo hiperbolično metriko d s predpisom

$$d(z, w) = \text{arch} \left(1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)} \right).$$

Opiši krožnico s središčem v točki $S(x_0, y_0)$ in polmerom r .

Krožnica v hiperbolični metriki ima enačbo $(x - x_0)^2 + (y - y_0 \text{ch } r)^2 = (y_0 \text{sh } r)^2$.

- (6) Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica danega metričnega prostora:

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ je iracionalen}\} \subset \mathbb{R}$,
(b) $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$,
(c) $A = \{(k, l) \mid k, l \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$,
(d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) ni odprta, ni zaprta (b) ni odprta, ni zaprta (c) ni odprta, je zaprta (d) ni odprta, je zaprta.

- (7) Naj bosta A in B podmnožici evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$.

- (1) Pokaži, da velja $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
(2) Denimo, da je A odprta, B pa zaprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. Pokaži, da je potem $A \setminus B$ odprta, $B \setminus A$ pa zaprta podmnožica $\mathbb{R}^n$.

- (8) Ugotovi, ali so dani metrični prostori kompaktni:

- (a) $M = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$,
(b) $M = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$,
(c) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$,
(d) $O(2) = \{Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid Q^T Q = I\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(a) ni kompakten (b) ni kompakten (c) je kompakten (d) je kompakten.

- (9) Na množici $\mathbb{R}$ definirajmo metriko d s predpisom $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Pokaži, da obstaja podmnožica $A \subset (\mathbb{R}, d)$, ki je zaprta in omejena, a ni kompaktna.
- (10) Naj bosta A in B kompaktni podmnožici evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. Pokaži, da sta potem tudi $A \cup B$ in $A \cap B$ kompaktni podmnožici $\mathbb{R}^n$.