

ANALIZA 1
30. domača naloga

- (1) Na množico $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vseh realnih polinomov stopnje največ dva vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2) = |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Naj bo $A \subset \mathbb{R}_2[x]$ podmnožica vseh tistih polinomov, ki imajo dve različni ničli na $[0, 1]$. Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica $\mathbb{R}_2[x]$.

Množica A ni niti odprta niti zaprta.

- (2) Naj bo M množica vseh realnih zaporedij $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ z lastnostjo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Na množici M je definirana metrika d s predpisom

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Naj bo $A \subset M$ podmnožica vseh zaporedij $\mathbf{x} \in M$, za katera velja $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica M ?

Množica A ni niti odprta niti zaprta.

- (3) Naj bo $M = [0, 1]$. Element $x \in M$ podamo v dvojiškem zapisu $x = 0.x_1x_2x_3\dots$, v katerem se ne ponavljajo enice od neke dalje. Nato definiramo metriko $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$d(x, y) = \begin{cases} 2^{-k}, & k = \min \{n : x_n \neq y_n\}, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

(a) Pokaži, da za poljubni odprti krogli prostora (M, d) velja, da sta bodisi disjunktni bodisi je ena podmnožica druge.

(b) Ali je množica $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ kompaktna v (M, d) ?

(b) Množica A ni kompaktna.

- (4) Množico $M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je omejena funkcija}\}$ vseh omejenih funkcij na intervalu $[0, 1]$ opremo s supremum metriko $d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Naj bo $R \subset M$ podmnožica vseh Riemannovo integrabilnih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Utemelji, ali je R odprta, zaprta oziroma kompaktna podmnožica M .

Množica R je zaprta, ni pa odprta oziroma kompaktna.

- (5) Obravnavaj zveznost preslikav $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ in $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_1)$

Obe preslikavi sta zvezni.

- (6) Na množico $\mathbb{R}^2$ s koordinatnim izhodiščem $O = (0, 0)$ vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(T_1, T_2) = \begin{cases} d_2(T_1, T_2) & \text{; točki } T_1 \text{ in } T_2 \text{ ležita na istem poltraku z začetkom v } O, \\ d_2(T_1, O) + d_2(O, T_2) & \text{; sicer,} \end{cases}$$

kjer je d_2 evklidska metrika na $\mathbb{R}^2$.

Obravnavaj zveznost preslikav $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ in $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$.

Preslikava $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ je zvezna, preslikava $\text{Id} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ pa ne.

- (7) Na množico $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(z, w) = \text{arch} \left(1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)} \right).$$

Naj bo $\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ preslikava s predpisom $\tau(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Pokaži, da zožitev preslikave τ na $\mathbb{H}^2$ inducira zvezno bijekcijo $\tau : (\mathbb{H}^2, d) \rightarrow (\mathbb{H}^2, d)$.

- (8) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ kvadratna matrika. Pokaži, da je preslikava $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisom $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ zvezna, če imamo na $\mathbb{R}^2$ evklidsko metriko.

(9) Množico vseh linearnih funkcij $L = \{kx + n \mid k, n \in \mathbb{R}\}$ opremimo z metriko

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Ali je preslikava $\Phi : (L, d) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\Phi(f) = \int_0^1 f(x) dx$ zvezna?

Preslikava Φ je zvezna.

(10) Na množico realnih polinomov $\mathbb{R}[x]$ vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(p, q) = \int_0^1 |p(x) - q(x)| dx.$$

Obravnavaj zveznost preslikave $D : (\mathbb{R}[x], d) \rightarrow (\mathbb{R}[x], d)$, ki je dana s predpisom $D(p) = p'$.

Preslikava D ni zvezna.