

1. Naj bo  $A = \{p + q(i\sqrt{3}) \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ . Ali je kolobar za običajno seštevanje in množenje? Ali je obseg?

2. Naj bo  $P(X)$  množica vseh podmnožic množice  $X$ . Definirajmo operaciji:

- $Y + Z = Y \Delta Z$ , kjer  $\Delta$  označuje simetrično razliko množic.
- $Y \cdot Z = Y \cap Z$ .

Pokaži, da je  $(P(X), +, \cdot)$  kolobar.

3. Naj bo  $R$  množica matrik oblike

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}.$$

(a) Če so  $a, b \in \mathbb{R}$ , dokaži, da je  $R$  kolobar.

(b) Če so  $a, b \in \mathbb{Q}$ , dokaži, da je  $R$  obseg.

(c) Če so  $a, b \in \mathbb{Z}_3$ , dokaži, da je  $R$  obseg.

Operaciji sta v vseh primerih seštevanje in množenje matrik.

4. V kolobarju  $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$  reši enačbe:

- $3x + 5 = 2$
- $6x + 7 = 4$
- $2x^2 + 5x + 3 = 0$

5. V kolobarju  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  reši sistema enačb:

- $2x + 7y = 11$  in  $5x + 3y = 11$ .
- $3x + 7y = 4$  in  $6x + y = 1$ .

6. Naj v  $\mathbb{Z}_{100}$  velja:

$$55x + 92y = 79$$

$$9x + 2y = 1$$

Poišči vse možne rešitve  $x, y \in \mathbb{Z}_{100}$ .

7. V polju  $(\mathbb{Z}_{103}, +, \cdot)$  reši sistem enačb:  $30x + 7y + 16z = 4$ ,  $6x + y + 55z = 1$  in  $x + y + 13z = 22$ .

8. Naj bosta  $p, q$  prašteveli. V kolobarju  $(\mathbb{Z}_{pq}, +, \cdot)$  poišči vse ideale in pripadajoče kvocientne kolobarje. Ali je kateri kvocientni kolobar polje?

## Domača naloga

9. Pokažite, da je grupa  $\mathbb{Z}_{15}^*$  izomorfna grupi  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ . Poiščite še izomorfizem med njima.

10. Naj bo  $G$  grupa generirana z dvema elementoma  $a$  in  $x$ , za katera veljajo relacije:  $a^6 = \text{id}$ ,  $x^2 = a^3$ ,  $ax = xa^{-1}$ .

(a) Pokaži, da ima grupa  $G$  12 elementov. Dovolj je, da pokažeš, da jih nima več kot 12.

(b) Grupa  $G$  ima 6 podgrup, če ne štejemo podgrupe z enim elementom in cele grupe. Poišči jih. Katere podgrupe so edinke?