

Kvadratne forme

1. Uvod

Monom v spremenljivkah $x_1, \dots, x_n$ je izraz oblike

$$c x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$$

kjer so $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}_0$ in $c \in \mathbb{R}$ (lahko tudi kako drugo polje). Število c je **koeficient** monoma. Število $d_1 + \dots + d_n$ je **stopnja** monoma (če $c \neq 0$).

Polinom v spremenljivkah $x_1, \dots, x_n$ je vsota monomov v $x_1, \dots, x_n$. S krajšanjem dosežemo, da imajo vsi ti monomi različne $(d_1, \dots, d_n)$. **Stopnja** polinoma je maksimum stopenj njegovih neničelnih monomov. Polinom je **konstanten/linearen/kvadraten/kubičen**, če je stopnje 0/1/2/3. Polinom je **forma**, če so vsi njegovi monomi iste stopnje.

Primer

Vsak kvadraten polinom v spremenljivkah x, y je oblike

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Opazimo, da je ta polinom vsota kvadratne forme $ax^2 + bxy + cy^2$, linearne forme $dx + ey$ in konstantne forme f

Primer

Vsaka kvadratna forma v spremenljivkah x, y, z je oblike

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$$

Če vstavimo $z = 1$ dobimo splošen kvadraten polinom

$$ax^2 + by^2 + c + dxy + ey + fx = ax^2 + dxy + by^2 + fx + ey + c$$

Linearne forme v spremenljivkah $x_1, \dots, x_n$ so oblike

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = a^T x,$$

kjer je $a = [a_i]$ vektor koeficientov in $x = [x_i]$ vektor spremenljivk.

Kvadratne forme v spremenljivkah $x_1, \dots, x_n$ so oblike

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = x^T A x,$$

kjer je $A = [a_{i,j}]$ matrika koeficientov in je $x = [x_i]$ vektor spremenljivk.

Ker je $a_{i,j} x_i x_j + a_{j,i} x_j x_i = (a_{i,j} + a_{j,i}) x_j x_i = \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} x_i x_j + \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} x_j x_i$, lahko predpostavimo, da je $a_{i,j} = a_{j,i}$, se pravi, da je A simetrična.

Primer

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$dx + ey = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Primer

$$\begin{aligned} & ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx = \\ & = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Opomba: Vidimo, da je pri mešanih členih bolje namesto d, e, f pisati $2d, 2e, 2f$.

2. Zamenjava spremenljivk

Če v kvadratno formo

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = x^T A x$$

vstavimo

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{1,1} x'_1 + \dots + p_{1,n} x'_n \\ &\vdots \\ x_n &= p_{n,1} x'_1 + \dots + p_{n,n} x'_n \end{aligned}$$

se pravi $x = P x'$, kjer $P = [p_{i,j}]$, dobimo novo kvadratno formo

$$x^T A x = (x')^T P^T A P x' = (x')^T A' x'$$

Definicija

Matrika A je **kongruentna** matriki B , če obstaja taka obrnljiva matrika P , da velja $B = P^T A P$.

Opomba: Kongruentnost matrik je ekvivalenčna relacija.

Definicija

Signatura simetrične matrike A je urejeni par (k, l) , kjer je k število strogo pozitivnih lastnih vrednosti A , l pa število strogo negativnih lastnih vrednosti A (oboje je šteto z večkratnostmi).

Sylvestrov izrek o inerciji

Simetrična matrika A je kongruentna matriki bločne oblike

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & -I_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

natanko tedaj, ko je (k, l) signatura matrike A .

Dokaz lažje smeri: Vemo, da za vsako simetrično matriko A obstaja taka ortogonalna matrika Q in taka diagonalna matrika $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, da velja $A = QDQ^{-1}$. S permutacijo diagonalnih elementov D in z ustrezno permutacijo stolpcev P lahko dosežemo, da je

$$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0, \lambda_{k+1} < 0, \dots, \lambda_{k+l} < 0, \lambda_{k+l+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

Definirajmo matriko

$$E = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k}, \sqrt{-\lambda_{k+1}}, \dots, \sqrt{-\lambda_{k+l}}, 1, \dots, 1)$$

Ker je $D = E \text{diag}(I_k, -I_l, 0) E^T$, je

$$A = QDQ^{-1} = QDQ^T = QE \text{diag}(I_k, -I_l, 0) (QE)^T$$

Ker sta Q in E obrnljivi, je torej A kongruentna $\text{diag}(I_k, -I_l, 0)$.

Dokaž težje smeri izpustimo.

Posledica

Dve simetrični matriki iste velikosti sta kongruentni natanko tedaj, ko imata enako signaturo.

Posledica

Vsako kvadratno formo

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

kjer je $[a_{i,j}]$ simetrična matrika s signaturo (k, l) , lahko z linearno zamenjavo spremenljivk prevedemo na obliko

$$(x'_1)^2 + \dots + (x'_k)^2 - (x'_{k+1})^2 - \dots - (x'_{k+l})^2$$

Primer

Vsako kvadratno formo $ax^2 + bxy + cy^2$ lahko z linearno zamenjavo spremenljivk prevedemo na natanko eno od naslednjih kvadratnih form

$$0, \quad (x')^2, \quad -(x')^2, \quad (x')^2 + (y')^2, \quad (x')^2 - (y')^2, \quad -(x')^2 - (y')^2$$

3. Krivulje 2. reda

Krivulja drugega reda je množica rešitev enačbe

$$p(x, y) = 0,$$

kjer je $p(x, y)$ realen polinom druge stopnje, se pravi

$$p(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

kjer $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Primer $b = 0$ ste obravnavali že v gimnaziji, kjer ste se naučili, da se taka krivulja s primernim premikom prevede na elipso ali hiperbolo ali parabolo ali par premic. Oglejmo si še primer $b \neq 0$.

Množico rešitev enačbe $p(x, y) = 0$ označimo z

$$V(p) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid p(x, y) = 0 \right\}.$$

Če definicijo polinoma $p(x, y)$ zapišemo v matrični obliki, dobimo

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f \quad (1)$$

Iz poglavja o simetričnih matrikah vemo, da obstaja taka ortogonalna matrika P , da velja

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} P^T. \quad (2)$$

Z morebitno spremembo predznaka prvega stolpca matrike P lahko dosežemo, da je $\det P = 1$. Pokazali smo, da je potem P vrtež

$$P = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Definirajmo novi spremenljivki x' in y' z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5)$$

Označimo še $\begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} P$. Potem velja

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f \quad (6) \\ &= d_1(x')^2 + d_2(y')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f. \end{aligned}$$

Označimo

$$q(x, y) = d_1x^2 + d_2y^2 + 2d'x + 2e'y + f. \quad (7)$$

Množico rešitev enačbe $q(x, y) = 0$, se pravi

$$V(q) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid q(x, y) = 0 \right\}$$

znamo narisati, ker $q(x, y)$ ne vsebuje člena xy .

Kako iz množice $V(q)$ dobimo množico $V(p)$? Iz (6) in (7) sledi

$$q(x', y') = p(x, y). \quad (8)$$

Če upoštevamo še zvezo (5), dobimo

$$\begin{aligned} V(p) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid p(x, y) = 0 \right\} \\ &= \left\{ P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \mid p(x, y) = 0 \right\} \\ &= \left\{ P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \mid q(x', y') = 0 \right\} \\ &= \left\{ P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in V(q) \right\} \end{aligned}$$

Torej množico $V(p)$ dobimo tako, da množico $V(q)$ zavrtimo za kot ϕ v pozitivno smer.

Primer

Nariši krivuljo $4x^2 + 4xy + 7y^2 = 1$

Rešitev: Matrika polinoma je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

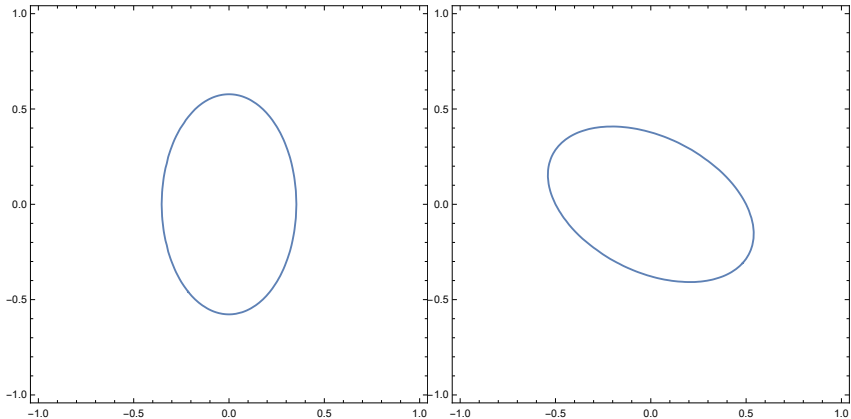
Lastni vrednosti sta 8 in 3. Ortogonalna matrika iz pripadajočih lastnih vektorjev je

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

To je vrtež za kot $\arctg 2$ kar je približno 63.4° . Elipso

$$8x^2 + 3y^2 = 1$$

znamo narisati. Če jo zavrtimo za 63.4° dobimo iskano krivuljo.



Leva krivulja je $8x^2 + 3y^2 = 1$, desna pa $4x^2 + 4xy + 7y^2 = 1$.

Primer

Če imamo dve merilni napravi in veliko ponovitev, potem elipsa

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} C^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5.9912,$$

vsebuje približno 95% centraliziranih podatkov (=vrstic matrike X').
Njeni glavni osi se ujemata z lastnima podprostoroma matrike C .

