Numerično reševanje navadnih dif. enačb (začetni problemi)

Rešujemo:

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))\ ;\ y(a) = y_a}$$

Začetni problem

$$y' = f(x, y)\ ;\ y(a) = y_a$$

Eksistenca rešitve:
Če je f zvezna na prvo spremenljivko in Lipschitzova na drugo, potem (vsaj lokalno) obstaja analitična rešitev zgornjega problema.

Numerična rešitev:

Izberemo nekaj delilnih točk

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_N = b$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$ (pogosto je $h_i \equiv h$).

Iščemo pa $y_i \approx y(x_i)$!!!

Metode so lahko <u>eksplicitne</u> (približke y_i računamo direktno po formuli) ali <u>implicitne</u> (y_i dobimo kot rešitev nelinearne enačbe (oz. sistema)).
Oba tipa metod delimo na enočlenske (enokoračne) ali veččlenske (večkoračne).

Natančnost:

<u>Lokalna napaka</u> je razlika

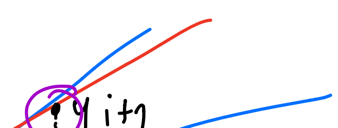
$y_{i+1} - z(x_{i+1})$, kjer je z rešitev $z' = f(x, z)$; $z(x_i) = y(x_i)$.

Lokalna napaka je reda $p \in \mathbb{N}$, če je

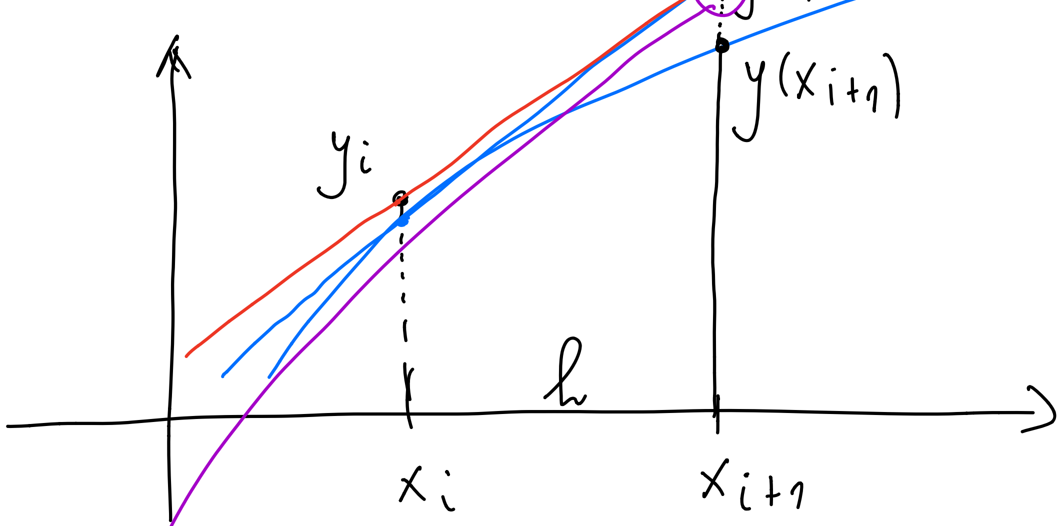
$$y_{i+1} - z(x_{i+1}) = C h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

Enočlenske eksplicitne metode

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i); \quad i = 0, 1, \dots$$



analitične rešitev



$$f(x_i, y_i) \doteq y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)}$$

Boljše (bolj natančne) so metode Runge-Kutta:

$$k_1 = h\, f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

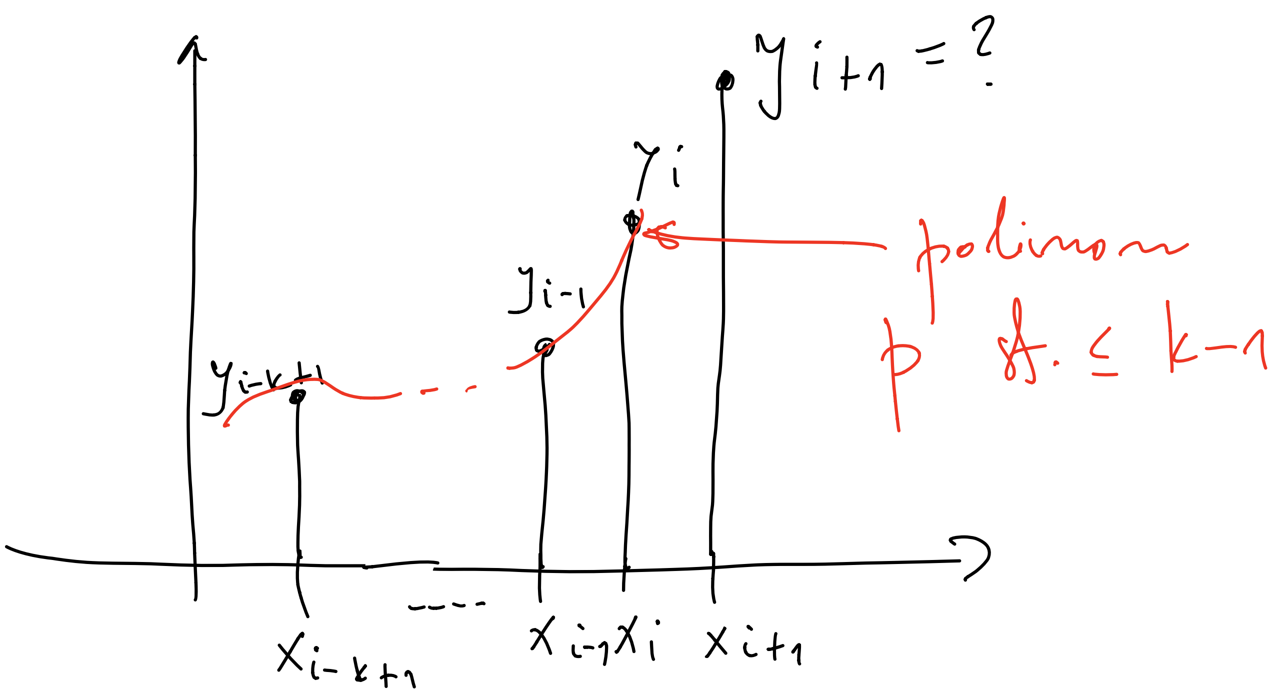
$$k_4 = h\, f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Eksplicitne veččlenske metode

Pri izračunu y_{i+1} upoštevamo poleg y_i še približke $y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$ (k-členska metoda)

Na začetku za konstrukcijo $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ uporabimo neko eksplicitno enočlensko metodo primerljivega reda natančnosti, kot veččlenska.



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{k-1}(x)\,dx \,,$$

$$p_{k-1}(x_j) = f(x_j, y_j), \quad j = i, i-1, \dots, i-k+1$$

<u>Primer</u>: $k = 2$

$$p_1(x_i) = f_i \qquad\qquad h = x_i - x_{i-1}$$

$$p_1(x_{i-1}) = f_{i-1}$$

$$p_1(x) = f_{i-1} + (x - x_{i-1})\,[x_{i-1}, x_i]\, f(\cdot, y(\cdot))$$

$$= f_{i-1} + (x - x_i)\, \frac{f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{h}}$$

$\boxed{\text{Če pišemo } f(x_i, y_i) =: f_i, \text{ dobimo}}$

$$p_1(x) = f_{i-1} + (x - x_{i-1}) \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

Metoda:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}(x - x_{i-1})\,dx$$

$$= y_i + h f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \left. \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \right|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= y_i + h f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \left(\frac{4h^2}{2} - \frac{h^2}{2} \right)$$

$$= y_i + h f_{i-1} + (f_i - f_{i-1}) \frac{3}{2} h$$

$$\boxed{= y_i + \frac{h}{2} (3 f_i - f_{i-1})}$$

Adams-Bashforthove metode

Implicitne metode
(enoūlenske)

Splošna oblika:

$$y_{i+1} = \phi(h, x_i, y_i, y_{i+1}, f)$$

Ponavadi:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi_1(x_i, y_i, y_{i+1}, f)$$

Rešavati moramo enačbo

$$z = \underbrace{y_i + h\,\phi_1(x_i, y_i, z, f)}_{g(z)}$$

$$z^{(j+1)} = g(z^{(j)})\ ;\ j = 0, 1, \ldots$$

$z^{(0)} = y_i$ (ali pa kak y_{i+1} z eksplicitno metodo)

$$|g'(z)| = h \cdot \Big|\underbrace{\frac{\partial \phi_1}{\partial z}(x_i, y_i, z, f)}_{\leq M \text{ konstanta}}\Big| < 1$$

$$h \cdot M < 1$$

$$h < \frac{1}{M}$$

Primer: (trapezna metoda)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right)$$