

1 Metrični prostori

Naloga 1.1. Naj bo d običajna evklidska metrika na ravnini $\mathbb{R}^2$, metrika D pa naj bo dana s predpisom

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \begin{cases} |x_1 - x_2|, & \text{če } y_1 = y_2, \\ |x_1| + |x_2| + |y_1 - y_2|, & \text{če } y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

- (a) Preverite, da je D dejansko metrika na $\mathbb{R}^2$.
- (b) Skicirajte različne oblike krogel glede na metriko D .
- (c) Določite notranjost, zaprtje in mejo množice $A = (-1, 1) \times [0, 1]$ glede na metriki d in D .
- (d) Obravnavajte konvergenco zaporedja $((\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ v metrikah d in D .
- (e) Ugotovite, ali je katera od identičnih preslikav $(\mathbb{R}^2, D) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ oz. $(\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, D)$ zvezna.

Naloga 1.2. Prostor $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ neskončnokrat zvezno odvedljivih realnih funkcij na intervalu $[0, 1]$ opremimo z metriko $d_\infty(f, g) := \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

- (a) Dokažite, da je zaporedje $(x \mapsto \frac{x^n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno.
- (b) Dokažite, da preslikava $C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty([0, 1], \mathbb{R}), f \mapsto f'$ ni zvezna.

Naloga 1.3. Prostor $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ zveznih preslikav $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ opremimo z metriko

$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

- (a) Obravnavajte konvergenco zaporedij $(x \mapsto \max\{0, 1 - nx\})_{n \in \mathbb{N}}$ in $(x \mapsto \max\{0, n - n^3x\})_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Dokažite, da zaporedje $(x \mapsto \max\{0, n - n^2x\})_{n \in \mathbb{N}}$ ni Cauchyjevo (in torej ni konvergentno).
- (c) Za zaporedje $(x \mapsto \min\{\max\{0, nx - \frac{n}{2}\}, 1\})_{n \in \mathbb{N}}$ dokažite, da je Cauchyjevo, ni pa konvergentno.

Naloga 1.4. Naj bo M metrični prostor z metriko d . Za neprazno podmnožico $S \subseteq M$ definiramo funkcijo razdalje $d(_, S): M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $d(x, S) := \inf \{d(x, y) \mid y \in S\}$.

- (a) Dokazite, da je $d(_, S)$ dobro definirana zvezna preslikava.
- (b) Dokazite, da je S zaprta v M natanko tedaj, ko je $S = d(_, S)^*(\{0\})$.

Naloga 1.5. Naj bo M metrični prostor z metriko d in naj $\mathcal{M}$ označuje množico vseh nepraznih kompaktnih podmnožic prostora M . Definirajmo preslikavo $hd: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$hd(K, L) := \max \left\{ \sup_{x \in K} d(x, L), \sup_{y \in L} d(y, K) \right\}.$$

- (a) Dokazite, da je hd metrika na $\mathcal{M}$ (imenuje se **Hausdorffova metrika**).
- (b) Prepričajte se, da predpis $x \mapsto \{x\}$ določa izometrično vložitev $(M, d) \rightarrow (\mathcal{M}, hd)$.