

1 Računanje z množicami in preslikavami

Naloga 1.1. Definirajmo množice

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \quad C = \{\star\}.$$

Zapišite kakšen element vsake od naslednjih množic:

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| (a) B , | (b) $1 \times B$, | (c) $(A \times B) \times C$, |
| (d) $A \times (B \times C)$, | (e) $A \times B \times C$, | (f) $A \times (B + C)$, |
| (g) $A \times B + A \times C$, | (h) A^B , | (i) $A^\emptyset$, |
| (j) $(A + C)^B$, | (k) C^{A+B} . | |

Naloga 1.2. Definirajmo preslikavo f :

- domena je množica naravnih števil,
- kodomena je množica naravnih števil,
- prirejanje: številu priredimo njegov največji delitelj.

Katero število to prirejanje priredi številu 666? Ali je funkcija f dobro definirana?

Naloga 1.3. Definirajmo preslikavo $\min: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s funkcijskim predpisom

$$\min: (x, y) \mapsto \begin{cases} x & \text{če } x \leq y, \\ y & \text{če } y \leq x. \end{cases}$$

V funkcijski predpis za $\min$ vstavite argument $(\pi, \sqrt[3]{31})$ in izračunajte rezultat.

Naloga 1.4. Definirajmo preslikavo:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \min(f(0), f(1)). \end{aligned}$$

V ta funkcijski predpis vstavite argument

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3 - 2 \cdot x \end{aligned}$$

in izračunajte rezultat.

Naloga 1.5. Definirajmo preslikavi

$$\psi: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$\psi: f \mapsto (n \mapsto f(n) + f(f(n)))$$

$$\theta: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$\theta: g \mapsto (k \mapsto g(k^2)).$$

Izračunajte $\theta(\psi(x \mapsto 2x + 1))(7)$ in $\psi(\theta(x \mapsto 2x + 1))(7)$.

Naloga 1.6. Naj bo A množica.

- (a) Koliko je preslikav $A \rightarrow 1$?
- (b) Koliko je preslikav $1 \rightarrow A$?

Naloga 1.7. Zapišite kak funkcijski predpis za funkcijo z dano domeno in kodomeno, pri čemer so A , B in C množice:

- (a) $A \times A \rightarrow A \times A \times A$,
- (b) $C^A \rightarrow C^{A \times B}$,
- (c) zapišite *tri* funkcijske predpise $A^A \rightarrow A^A$. Ali določajo različne preslikave?

Naloga 1.8. Preverite, da velja:

- (a) $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, pri čemer zapišite *dva* različna avtomorfizma,
- (b) $\mathbb{R} \cong (0, 1)$,
- (c) $1 + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$,
- (d) $\mathbb{N} + \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$.

Naloga 1.9. Za dano preslikavo ugotovite, ali je izomorfizem. Odgovor utemeljite.

- (a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + x$,
- (b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - x$,
- (c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$,
- (d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Naloga 1.10. Poiščite izomorfizem med:

- (a) množico strogo naraščajočih zaporedij realnih števil in množico zaporedij pozitivnih realnih števil,
- (b) premico in krožnico brez ene točke.

Naloga 1.11. Naj bodo A , B in C množice. Preverite, da velja:

- (a) $A + B \cong B + A$,
- (b) $(A + B) + C \cong A + (B + C)$,
- (c) $A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C$,
- (d) $A^1 \cong A$,
- (e) $A^2 \cong A \times A$, kjer je $\mathbf{2} = \{\perp, \top\}$,
- (f) $A^\emptyset \cong \mathbf{1}$,
- (g) $C^{A+B} \cong C^A \times C^B$,
- (h) $(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$.

Naloga 1.12. Denimo, da je $f: A \rightarrow B$ izomorfizem. Preverite, da sta izomorfizma tudi sledeči preslikavi.

$$\begin{array}{l} A^C \rightarrow B^C \\ g \mapsto f \circ g \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C^B \rightarrow C^A \\ h \mapsto h \circ f. \end{array}$$