

Analiza 1

1. izpit

14. 6. 2021

RESITVE

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- N S predpisom $d(m, n) = |m^2 - n^2|$ je podana metrika na \mathbb{Z} .
- N Naj bo A podmnožica metričnega prostora (M, d) . Tedaj je $a \in \partial A$ natanko tedaj, ko za nek $r > 0$ velja $K(a, r) \cap A \neq \emptyset$ in $K(a, r) \cap A^c \neq \emptyset$.
- P Če je kompozitum dveh injektivnih funkcij surjektiven, je tudi bijektiven.
- P Naj bo f odvedljiva na okolici točke $x = 0$ in naj velja $f(0) = 0$ in $f'(0) < 0$. Obstaja $h > 0$, da je $f(h)f(-h) < 0$.
- P Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja, da je vsota rešitev kompleksne enačbe $z^{2n} = 1$ realna.
- N Množica $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 + q > 0\}$ je Dedekindov rez.
- P Množica iracionalnih števil je neštevno neskončna.
- N Obstaja divergentno zaporedje (a_n) , za katerega je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentna.
- P Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $x \in [0, 1]$ velja $|f_n(x)| < c_n$ in je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, potem je funkcijsko zaporedje (f_n) enakomerno konvergentno na $[0, 1]$.
- P Vsak polinom je enakomerno zvezen na intervalu $(0, 1)$.

Analiza 1: 1. izpit

Rešitve

2. naloga (10 točk)

Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ oglišča kvadrata v \mathbb{C} , ki ima težišče v točki 0 in ki zadoščajo pogoju $abcd = 2 + i2\sqrt{3}$. Določi množico oglišč $\{a, b, c, d\}$.

Rešitev: Oglišča kvadrata ležijo na krožnici s središčem v izhodišču, zato jih lahko zapišemo v polarni obliki

$$a = re^{i\varphi}, \quad b = re^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}, \quad c = re^{i(\varphi+\pi)}, \quad d = re^{i(\varphi+\frac{3\pi}{2})}.$$

Velja torej

$$abcd = r^4 e^{i(4\varphi+3\pi)} = 2 + i2\sqrt{3} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Temu pogoju zadošča množica oglišč

$$\{a, b, c, d\} = \left\{ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} \right\}.$$

Točkovnik:

- Ideja s polarnimi koordinatami (3 točke).
- Polarni zapis $2 + i2\sqrt{3}$ (3 točke).
- Končna rešitev (4 točke).

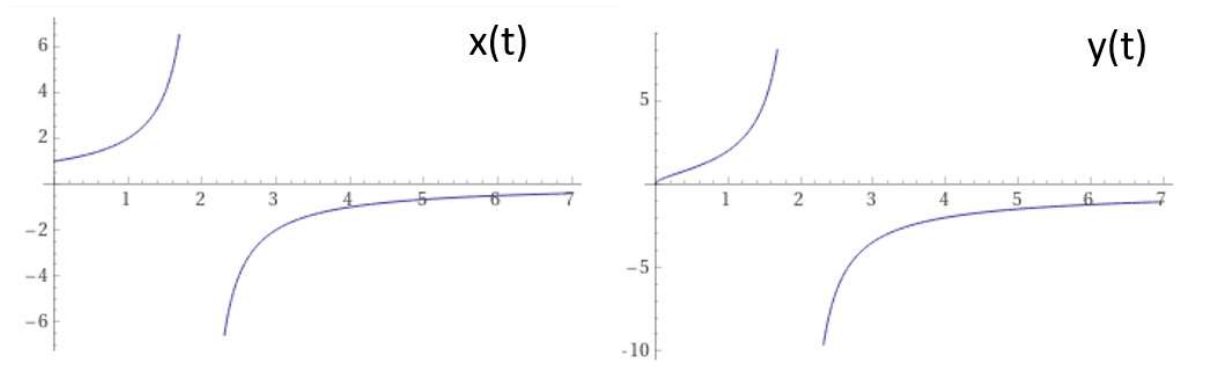
3. naloga (15 točk)

Za $t \in [0, 2) \cup (2, \infty)$ je podana parametrična krivulja s predpisom:

$$x(t) = \frac{2}{2-t}, \quad y(t) = \frac{2\sqrt{t}}{2-t}.$$

- Skiciraj grafa funkcij $x(t)$ in $y(t)$ v odvisnosti od parametra t .
- Izračunaj linearno asimptoto krivulje. Skiciraj krivuljo in označi njeno orientacijo.
- Poišči realno funkcijo, katere graf se ujema s krivuljo.

Rešitev: Grafa funkcij $x(t)$ in $y(t)$ sta prikazana na spodnji sliki.



Za linearno asimptoto velja

$$k = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sqrt{2},$$

$$n = \lim_{t \rightarrow 2} (y - kx) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

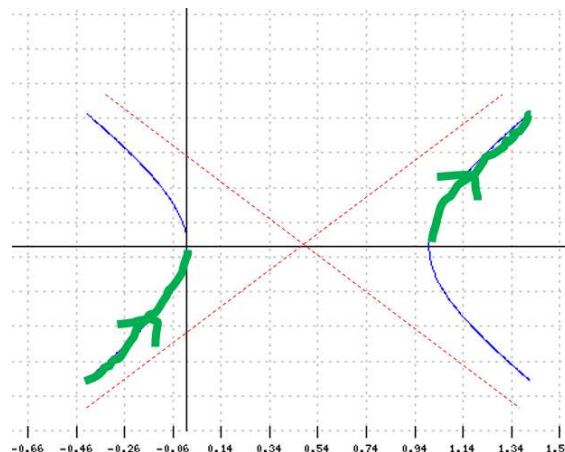
Ker je $x(t)$ injektivna funkcija, lahko izrazimo

$$t = 2 - \frac{2}{x} \Rightarrow y = x \sqrt{2 - \frac{2}{x}} \Rightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2y^2 = 1.$$

Podana parametrična krivulja torej poteka po hiperboli.

Točkovnik:

- Skica funkcij $x(t)$ in $y(t)$ (4 točke).
- Izračun asimptote (4 točki). Skica krivulje z orientacijo (4 točke).
- Določitev funkcije (3 točke).



4. naloga (15 točk)

Določi število $\alpha > 0$, za katero je integral

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{\alpha}{x + 2} \right) dx$$

konvergenten in izračunaj njegovo vrednost.

Rešitev: Velja

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{\alpha}{x + 2} \right) dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) - \alpha \ln(x + 2) + C = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{(x + 2)^\alpha} + C.$$

Ta integral v točki $x = 0$ obstaja za vse vrednosti $\alpha > 0$, limita pri $x \rightarrow \infty$ pa obstaja le za $\alpha = 1$. V tem primeru je $I = \ln 2$.

Točkovnik:

- Določitev parametra (8 točk).
- Izračun integrala (7 točk).

5. naloga (10 točk)

Funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x = \frac{1}{n} \text{ za nek } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Ugotovi, ali je funkcija f Riemannovo integrabilna. Če je, izračunaj $\int_0^1 f(x) dx$.

Rešitev: Funkcija je integrabilna, integral pa je enak nič. Res, naj bo $\epsilon > 0$. Obstaja natanko $\left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor$ števil, za katera je $x = \frac{1}{n} \geq \epsilon$. Riemannovo vsoto z lastnostjo $\max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) < \delta$ lahko ocenimo z naslednjim izrazom:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\zeta_0)x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(\zeta_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \delta + \frac{1}{\epsilon}\delta.$$

Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\epsilon < 1$. Če izberemo $\delta < \frac{\epsilon^2}{2}$, dobimo

$$R \leq \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Ker je bilo število ϵ poljubno majhno, je integral ničeln.

Točkovnik:

- Pravilen odgovor brez utemeljitve (0 točk).
- Pravilen odgovor z dokazom (10 točk).

6. naloga (15 točk)

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gladka funkcija, za katero obstaja konstanta $M \in \mathbb{R}$, da velja $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ in vsak $x \in \mathbb{R}$.

- a) Označimo s T_a Taylorjevo vrsto funkcije f glede na točko a . Pokaži, da Taylorjeva vrsta T_a konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$ in da je njena vsota enaka f .
- b) Ali funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ zadošča pogojem naloge? Odgovor dobro utemelji!

Rešitev: Naj bo $x \in [a - R, a + R]$, $R > 0$. Potem velja

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \right| \leq \frac{M^n R^n}{n!}.$$

Ker je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(MR)^n}{n!}$ konvergentna (kvocientni kriterij), je po Weierstrassovem izreku enakomerno konvergentna tudi vrsta T_a na vsakem intervalu $[a - R, a + R]$. Od tod sledi konvergenca na celotni realni osi. Funkcija iz točke b) ne zadošča pogojem naloge, saj njena Taylorjeva vrsta v točki $a = 0$ konvergira le na intervalu $(-1, 1)$.

Točkovnik:

- Točka a) (10 točk).
- Točka b) (5 točk).

7. naloga (15 točk)

Označimo z M množico vseh realnih absolutno konvergentnih vrst. Na M vpeljemo metriko s predpisom

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|,$$

kjer sta $\mathbf{a} = a_1 + a_2 + \dots$ in $\mathbf{b} = b_1 + b_2 + \dots$ absolutno konvergentni številski vrsti.

- Pokaži, da predpis d res določa metriko na M .
- Naj bo A podmnožica, ki sestoji iz vrst, ki imajo samo končno mnogo neničelnih členov. Poišči notranjost in rob množice A v M .
- Definirajmo preslikavo $F : (M, d) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ s predpisom $F(\mathbf{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ugotovi, ali je preslikava F zvezna.

Rešitev: Ker gre za absolutno konvergentne vrste, velja

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Torej je predpis dobro definiran. Očitni sta tudi ničelna definitnost in simetričnost. Pri trikotniški neenakosti pa preko delnih vsot dokažemo, da velja

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - c_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - c_n| = d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Notranjost množice A je prazna, saj je v poljubno majhni okolici $\mathbf{a} \in A$ tudi vrsta $\mathbf{a} + \epsilon \cdot \mathbf{b} \in A^c$, kjer je $\epsilon > 0$ in

$$\epsilon \cdot \mathbf{b} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} + \dots$$

Po drugi strani velja $\partial A = M$, saj lahko vsako absolutno konvergentno vrsto iz M poljubno blizu aproksimiramo s končno vsoto.

Nazadnje velja, da je F zvezna. Res, naj bo $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \delta$. Potem velja

$$|F(\mathbf{a}) - F(\mathbf{b})| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| < \delta.$$

Za poljuben $\epsilon > 0$ lahko torej izberemo $\delta = \epsilon$.

Točkovnik:

- Točka a) (3 točk).
- Točka b) (8 točk).
- Točka c) (4 točke).