

Rešitve 4. kolokvija iz Analize 1

- (1) **P** Za $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ velja $f^{(13)}(0) = 13!$.
- N** Naj bosta d_1 in d_∞ standardni metriki prostora $\mathcal{C}([0, 1])$. Obstaja množica funkcij, ki je omejena v d_∞ in ni omejena v d_1 .
- P** Vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je neodvisna od vrstnega reda seštevanja.
- N** Naj bodo vsi odvodi funkcije $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni na $(-1, 1)$. Tedaj f enaka potenčni vrsti s središčem v $a = 0$ in konvergenčnim polmer enakim 1.
- N** Če za tri točke metričnega prostora (M, d) velja $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, sta vsaj dve med njimi enaki.
- N** Če potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$ konvergira v $x = 3$, konvergira tudi v $x = -1$.
- N** Naj bodo $a_n \neq 0$. Če za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, obstaja njena vsota.
- P** Obstaja metričen prostor, v katerem je vsaka podmnožica kompaktna.
- P** Naj bodo $a_n \geq 0$. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$.
- N** Če zaporedje zveznih funkcij $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergira k zvezni funkciji $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, je njegova konvergenca na intervalu $[0, 1]$ enakomerna.

(2) Ugotovi, ali sta dani vrsti absolutno oziroma pogojno konvergentni:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right).$

Rešitev: a) Dana vrsta ima pozitivne člene, zato lahko bodisi divergira ali pa absolutno konvergira. Konvergenco bomo testirali z uporabo kvocientnega kriterija

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}}}{\frac{1}{\binom{2n}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Ker je $D = \frac{1}{4} < 1$, je vrsta absolutno konvergentna.

b) Tokrat imamo alternirajočo vrsto. Ker je $\ln \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2+1} \right) > 0$, je vrsta iz absolutnih vrednosti členov enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right).$$

Če upoštevamo oceno $\ln(1+x) \leq x$ za $x \geq 0$, lahko zgornjo vrsto navzgor ocenimo na naslednji način

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

S predavanj vemo, da vrsta na desni konvergira, od koder sledi, da je naša vrsta absolutno konvergentna. \square

· [6] Dokaz, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ absolutno konvergira.

· [9] Dokaz, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)$ absolutno konvergira.

(3) Natančno izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}.$$

Pri tem si pomagaj s primerno izbrano potenčno vrsto.

Rešitev: Za izračun vsote vrste najprej definirajmo potenčno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

Preverimo lahko, da dana potenčna vrsta konvergira za $x \in (-2, 2)$, pri $x = 1$ pa se njena vrednost ujema vsoto naše vrste. Če označimo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} x^n,$$

dobimo z integracijo po členih

$$\int f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2^n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} = -2(q^2 + q^3 + q^4 + \dots),$$

kjer smo označili $q = -\frac{x}{2}$. Če upoštevamo formulo za vsoto geometrijske vrste, tako dobimo

$$\int f(x) dx = -2(q^2 + q^3 + q^4 + \dots) = \frac{-2q^2}{1-q} = \frac{-\frac{x^2}{2}}{1+\frac{x}{2}} = -\frac{x^2}{2+x}.$$

Z odvajanjem sedaj dobimo

$$f(x) = \left(-\frac{x^2}{2+x} \right)' = -\frac{2x(2+x) - x^2}{(2+x)^2} = -\frac{x^2 + 4x}{(2+x)^2}.$$

Ko vstavimo $x = 1$, pa dobimo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} = -\frac{5}{9}.$$

□

- [4] Izbira primerne potenčne vrste.
- [8] Izračun vsote potenčne vrste.
- [3] Izračun vsote vrste.

(4) Funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana s predpisom $f(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

a) Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - 3x^2}{x^4}$.

b) Razvij funkcijo f v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.

Rešitev: Najprej razvijmo dano funkcijo v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$. Uporabili bomo binomsko vrsto

$$\frac{1}{(1+t)^2} = 1 + \binom{-2}{1}t + \binom{-2}{2}t^2 + \binom{-2}{3}t^3 + \dots$$

Izračunamo lahko, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\binom{-2}{n} = (-1)^n(n+1).$$

Če vstavimo $t = -x^2$, dobimo razvoj

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \dots$$

Da dobimo Taylorjev razvoj funkcije f , moramo sedaj zgornji razvoj pomnožiti z $1 + x^2$. Po kratkem računu dobimo rezultat

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = 1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \dots$$

Za izračun limite pri a) delu bomo sedaj uporabili prve tri člene v zgornjem razvoju. Tako dobimo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 - 3x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x^2 + 5x^4 + \dots) - 1 - 3x^2}{x^4} = 5.$$

□

• [7] Izračun limite.

• [8] Razvoj v Taylorjevo vrsto.

- (5) Naj bo $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zvezna. Za $x \in [0, \infty)$ je podano funkcijsko zaporedje s predpisom

$$f_0(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

- a) Pokaži, da zaporedje $\{f_n\}$ konvergira enakomerno na $[0, 1]$. Kaj je njegoa limitna funkcija?
b) Pokaži, da je s predpisom $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ podana funkcija, ki je zvezna na $[0, \infty)$.

Namig: Na zaprtem intervalu lahko funkcije f_n oceniš s polinomi stopnje n .

Rešitev: a) Začnimo s funkcijo $f = f_0$ na intervalu $[0, 1]$. Ker je f zvezna in nenegativna, obstaja $M \in \mathbb{R}$, da velja $0 \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in [0, 1]$. Če zgornjo enakost integriramo po intervalu $[0, x]$, dobimo oceno

$$0 \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x M dt = Mx.$$

Od tod dobimo za $x \in [0, 1]$ oceno

$$0 \leq f_1(x) \leq Mx.$$

Če na podoben način sedaj integriramo zgornjo neenakost, dobimo oceno

$$0 \leq f_2(x) \leq \frac{1}{2}Mx^2.$$

Induktivno bi tako za poljuben $n \in \mathbb{N}$ dobili oceno

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}Mx^n.$$

Od tod sledi, da za vsak $x \in [0, 1]$ velja

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}Mx^n = 0.$$

Hkrati pa iz $\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{n!}$ sledi še, da je konvergenca enakomerna na $[0, 1]$.

- b) Najprej bomo pokazali, da dana vrsta enakomerno konvergira na $[0, a]$ za vsak $a > 0$. Na intervalu $[0, a]$ lahko podobno kot pri a) delu pokažemo, da obstaja $M_a > 0$, da je

$$\max_{x \in [0, a]} |f_n(x)| \leq \frac{M_a a^n}{n!}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_a a^n}{n!} = M_a e^a$ konvergira, je funkcijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ po Weierstrassovem kriteriju enakomerno konvergentna na $[0, a]$. Ker so njeni sumandi zvezne funkcije, je tudi njena vsota g zvezna na $[0, a]$. Če je neka funkcija zvezna na vsakem intervalu oblike $[0, a]$ za $a > 0$, pa je zvezna tudi na $[0, \infty)$. \square

- [3] Izpeljava ocene $0 \leq f_1(x) \leq Mx$.
- [3] Izpeljava ocene $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}Mx^n$.
- [3] Izračun limitne funkcije in dokaz, da je konvergenca enakomerna.
- [3] Uporaba Weierstrassovega kriterija za dokaz enakomerne konvergence na $[0, a]$.
- [3] Dokaz, da je g zvezna na $[0, \infty)$.

(6) Naj bo d_E evklidska razdalja na \mathbb{R}^2 . Za $p \in \mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$, $r > 0$ definiramo:

$$d_E(p, A) = \inf \{d_E(p, a), a \in A\} \quad \text{in} \quad A_r = \{q \in \mathbb{R}^2, d_E(q, A) \leq r\}.$$

- a) Dokaži, da je $d_E(p, A) = 0$ natanko tedaj, ko je p v zaprtju množice $A \subset (\mathbb{R}^2, d_E)$.
b) Naj bo M prostor vseh kompaktnih množic v (\mathbb{R}^2, d_E) . Pokaži, da je s predpisom

$$d(A, B) = \inf \{\rho \geq 0, A \subseteq B_\rho \wedge B \subseteq A_\rho\}.$$

podana metrika na M . (Nasvet: Pri trikotniški neenakosti najprej dokaži, da za $r \geq 0$ in $a \in B_r$ obstaja $c \in C$, da je $d(a, c) \leq r + d(B, C)$).

- c) Naj bo $N \subset M$ množica zaprtih krogov s središčem v izhodišču. Obravnavaj odprtost in zaprtost N v metričnem prostoru (M, d) .

Rešitev: a) Naj bo $p \in \overline{A}$. Potem lahko najdemo zaporedje točk (a_n) v A , da velja $d_E(p, a_n) < \frac{1}{n}$, od koder sledi $d_E(p, A) = 0$. Za dokaz v obratni smeri pa predpostavimo, da je $d_E(p, A) = 0$. Po definiciji infimuma od tod sledi, da za vsak $R > 0$ obstaja $a \in A$, da je $d_E(p, a) < R$. Torej vsaka krogla $K(p, R)$ seka množico A in posledično je $p \in \overline{A}$.

b) Direktno iz definicije sledi, da je $d(A, B) \geq 0$, $d(A, A) = 0$ in $d(A, B) = d(B, A)$, zato moramo pokazati pozitivno definitnost in trikotniško neenakost.

Denimo najprej, da je $d(A, B) = 0$ za neki kompaktni množici A in B . Po definiciji d od tod sledi, da je $A \subset B_\rho$ za vsak $\rho > 0$. Za poljuben $a \in A$ torej velja $d_E(a, B) = 0$, kar pa po a) delu pomeni, da je $a \in \overline{B}$. Ker je B kompaktna, smo torej dokazali, da je $A \subset \overline{B} = B$. Analogno lahko pokažemo tudi, da je $B \subset A$ in posledično $A = B$.

Za dokaz trikotniške neenakosti bomo najprej dokazali nasvet. Naj bo $r \geq 0$ in $a \in B_r$. Potem obstaja $b \in B$, da je $d_E(a, b) \leq r$. Po definiciji d pa nato obstaja zaporedje točk $(c_n) \in C$, da je $d_E(b, c_n) \leq d(B, C) + \frac{1}{n}$. Zaradi kompaktnosti množice C ima zaporedje (c_n) konvergentno podzaporedje, ki konvergira k točki $c \in C$, za katero je $d_E(b, c) \leq d(B, C)$. Z uporabo trikotniške neenakosti za evklidsko metriko sedaj dobimo

$$d_E(a, c) \leq d_E(a, b) + d_E(b, c) \leq r + d(B, C).$$

Z uporabo zgornje neenakosti bomo sedaj pokazali neenakost

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Vzemimo poljuben $a \in A$. S podobnim sklepom kot zgoraj lahko najdemo točko $b \in B$, za katero je $d_E(a, b) \leq d(A, B)$. To pa pomeni, da je $a \in B_{d(A, B)}$. Če uporabimo nasvet pri izbiri $r = d(A, B)$, tako dobimo točko $c \in C$, da je $d_E(a, c) \leq d(A, B) + d(B, C)$. Torej je $a \in C_{d(A, B) + d(B, C)}$. Ker to velja za vsak $a \in A$, je $A \subset C_{d(A, B) + d(B, C)}$. Na povsem enak način lahko dokažemo tudi, da je $C \subset A_{d(A, B) + d(B, C)}$. Oboje skupaj pa nam pove, da je $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

- c) Pokazali bomo, da množica N ni niti odprta niti zaprta v M .

Najprej pokažimo, da zaprt enotski krog K ni notranja točka množice N . Definirajmo množico $L_\epsilon = K \cup \{(1 + \epsilon, 0)\}$ za $\epsilon > 0$. Potem lahko preverimo, da je $d(K, L_\epsilon) = \epsilon$ in $L_\epsilon \notin N$, od koder sledi, da je K robna točka množice N .

Za dokaz, da N ni zaprta, pa vzemimo množico z eno točko $L = \{(0, 0)\}$. Če označimo s $K_n \in N$ zaprt krog s polmerom $\frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$, zaporedje (K_n) konvergira k L v metričnem prostoru M . Torej je L robna točka N , ki pa ne leži v N , kar pomeni, da N ni zaprta. \square

- [6] Dokaz, da je $d_E(p, A) = 0$ natanko tedaj, ko je $p \in \overline{A}$.
- [3] Dokaz, da je d pozitivno definitna.
- [5] Dokaz, da d zadošča trikotniški neenakosti.
- [3] Dokaz, da N ni odprta.
- [3] Dokaz, da N ni zaprta.