

Analiza 1

3. izpit

2. 9. 2019

1. naloga (20 točk)

N Vrsta je konvergentna natanko tedaj, ko njeni členi konvergirajo k 0.

P Zaporedje, podano z rekurzivno zvezo $a_{n+1} = 2\sqrt[3]{a_n}$ in začetnim pogojem $a_0 = 1$, je konvergentno.

P Če za $A, B \subset \mathbb{R}$ obstajata $\inf A$ in $\sup B$, obstaja tudi $\inf(A - B)$.

N Če potenčna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-2)^n$ konvergira za $x = 1$, konvergira tudi za $x = 3$.

P Polinom p z lastnostjo $p(0) = p(1)$ ima na intervalu $[0, 1]$ vsaj eno stacionarno točko.

N Obstaja $x \in \mathbb{R}$, da je $\tan(\arctan x) \neq x$.

P Če je f enakomerno zvezna na \mathbb{R} , so take tudi funkcije $g(x) = af(x) + b$, za $a, b > 0$.

N Vsaka funkcija, ki je zvezna na $[0, 1]$ in $(1, 2]$, je integrabilna na $[1, 2]$.

N Množica $(0, 1) \times \{0\}$ je zaprta v evklidskem prostoru (\mathbb{R}^2, d_2) .

P Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (10 točk)

Podan je sistem enačb:

$$\begin{aligned}(z - 4 - 2i)^n &= 1, \\ \arg(z - 2 - i) &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

- a) Za $n = 4$ poišči vsa kompleksna števila, ki ga rešijo.
b) V odvisnosti od $n \in \mathbb{N}$ obravnavaj število njegovih rešitev.

Rešitev: Pri $n = 4$ iz prve enačbe ugotovimo, da je

$$z - 4 - 2i \in \{\pm 1, \pm i\}.$$

Vendar pa izmed štirih možnih števil drugemu pogoju zadoščata le $4 + 3i$ in $3 + 2i$.

Sedaj enačbo obravnavajmo še za splošen $n \in \mathbb{N}$. Pomagamo si z skico v kompleksni ravnini. Kompleksna števila, ki rešijo drugo enačbo ležijo na poltraku $(2 + t) + (1 + t)i$, $t \geq 0$, števila, ki zadoščajo prvi enačbi, pa na krožnici s središčem v $4 + 2i$ in polmerom 1. Edini presečišči teh krivulj sta točki $4 + 3i$ in $3 + 2i$. Prva točka je n -ti koren enote za $n = 4k$, druga pa za $n = 2k$. Za $n = 4k$ imamo torej dve rešitvi, za $n = 4k + 2$ eno samo, za lihe n sistem ni rešljiv.

Točkovnik:

+5 Rešitev za $n = 4$.

+5 Obravnavo za $n \in \mathbb{N}$.

3. naloga (20 točk)

Podana je krivulja v polarni obliki

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi}}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi).$$

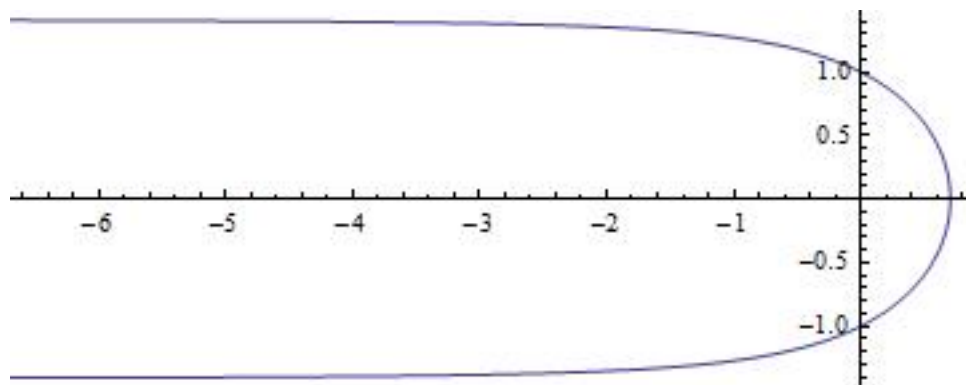
- a) Skiciraj graf funkcije $\varphi \rightarrow r(\varphi)$. Pokaži, da ima krivulja dve različni vodoravni asimptoti in krivuljo skiciraj.
b) Izračunaj ploščino omejenega lika med krivuljo in ordinatno osjo.

Rešitev: Funkcija $r(\varphi)$ ima minimum v $\varphi = 0$ in pola pri $\varphi = \pm\pi$. Pokažimo obstoj vodoravne asimptote

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} y(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} r(\varphi) \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi}} = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \frac{\sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi}}{\sqrt{\sin^2 \varphi}}.$$

Sedaj ločimo primera

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi \nearrow \pi} \frac{\sin \varphi \sqrt{1 + \cos \varphi}}{\sqrt{\sin^2 \varphi}} &= \lim_{\varphi \nearrow \pi} \frac{\sin \varphi \sqrt{1 + \cos \varphi}}{\sin \varphi} = \sqrt{2} \\ \lim_{\varphi \searrow -\pi} \frac{\sin \varphi \sqrt{1 + \cos \varphi}}{\sqrt{\sin^2 \varphi}} &= \lim_{\varphi \searrow -\pi} \frac{\sin \varphi \sqrt{1 + \cos \varphi}}{-\sin \varphi} = -\sqrt{2}\end{aligned}$$



Ploščino izračunamo z integracijo

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + \cos \varphi} = 1.$$

Točkovnik:

+2 Skica grafa $r(\varphi)$.

+4 Izračun asimptot.

+4 Skica krivulje.

+10 Izračun ploščine.

4. naloga (20 točk)

Za $n \in \mathbb{N}$ so podane funkcije $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$.

- Poišči limitno funkcijo zaporedja f_n na \mathbb{R} . Ali je konvergenca enakomerna? Svoj odgovor dobro utemelji.
- Dokaži, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentna za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ali je njena vsota zvezna funkcija na \mathbb{R} ? (Namig: oceni $\ln(1+x)$.)

Rešitev: Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \ln 1 = 0.$$

Konvergenca ni enakomerna, saj za vsak $\epsilon > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ obstaja $x \in \mathbb{R}$, da je $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$. Res, temu pogoju zadošča $|x| > n\sqrt{e^\epsilon - 1}$.

Če upoštevamo, da je $\ln(1+x) > x$, lahko uporabimo primerjalni kriterij

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Slednja Opazimo tudi, da je naša vrsta enakomerno konvergentna na vsakem intervalu $x \in [-R, R]$ (Weierstrassov kriterij). Torej je vsota zvezna na \mathbb{R} .

Točkovnik:

- +5 Limitna funkcija.
- +5 Obravnava enakomerne konvergence za f_n .
- +5 Konvergenca vrste.
- +5 Zveznost vsote.

5. naloga (10 točk)

Ugotovi, za katere $n \in \mathbb{N}$ obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2019(\sqrt[n]{1+x^3} - 1) - x^3}{(e^{x^2} - 1 - x^2) \sin^2 x}.$$

Kadar obstaja, jo izračunaj.

Rešitev: Uporabimo znane razvoje v vrsto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2019(\sqrt[n]{1+x^3} - 1) - x^3}{(e^{x^2} - 1 - x^2) \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2019(1 + \frac{1}{n}x^3 + \frac{1-n}{2n^2}x^6 + o(x^9) - 1) - x^3}{(\frac{x^4}{2} + o(x^6))(x + o(x^3))^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{2019}{n} - 1)x^3 + \frac{2019(1-n)}{2n^2}x^6 + o(x^9)}{\frac{x^6}{2} + o(x^8)}. \end{aligned}$$

Ta limita obstaja le za $n = 2019$, njena vrednost pa je $-\frac{2018}{2019}$.

- +7 Določitev ustreznega $n = 2019$.
- +3 Izračun limite.

6. naloga (10 točk)

Množico vseh linearnih funkcij $L = \{kx + n \mid k, n \in \mathbb{R}\}$ opremimo z metriko

$$d(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

- a) Naj bo $F : L \rightarrow \mathbb{R}^2$ podana s predpisom $F(kx + n) = (k, n)$. Skiciraj množico $F(K(x, 1))$.
- b) Ali je preslikava $\Phi : (L, d) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\Phi(f) = \int_0^1 f(x) dx$ zvezna?

Rešitev: Zanimajo nas premice $kx + n$, ki zadoščajo

$$d(kx + n, x) = \max_{x \in [0, 1]} |kx + n - x| < 1.$$

Maksimum tega izraza je dosežen v $x = 0$ ali $x = 1$, zato velja

$$d(kx + n, x) = \max\{|n|, |k - 1 + n|\} < 1.$$

Dobimo torej dva pogoja

$$|n| < 1 \quad \text{in} \quad -1 < k - 1 + n < 1.$$

Slika množice v točki a) je štirikotnik, ki ga omejujejo $n = \pm 1$, $n = 2 - k$ in $n = -k$.

Podobno velja, da je preslikava v točki b) zvezna, saj iz $d(f, g) < \delta$ sledi, da je

$$|n_f - n_g| < \delta \quad \text{in} \quad |k_f - k_g + n_f - n_g| < \delta.$$

Za tak par premic pa nadalje velja

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| = \left| \frac{k_f - k_g}{2} + n_f - n_g \right| \leq \frac{|k_f - k_g + n_f - n_g| + |n_f - n_g|}{2} < \delta = \epsilon.$$

+5 Točka a).

+5 Točka b).

7. naloga (10 točk)

Poišči zvezni funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščata pogoju $f(x)g(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $f(0) = g(0) = 0$. Ali obstajata zvezno odvedljivi funkciji, ki zadoščata danima pogoju?

Rešitev: Taki funkciji sta na primer

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

Tak par nikoli ne bo zvezno odvedljiv, saj bi v točki $x = 0$ moralo veljati

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1,$$

to pa je v protislovju z $f(0) = g(0) = 0$.

+5 Primer funkcij.

+5 Odgovor na vprašanje.