

## Rešitve 1. kolokvija iz Analize 1

- (A) **N** Obstaja zaporedje realnih števil, ki ima za stekališča natanko vsa racionalna števila.
- P** Naj bo  $z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$  in  $w = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})$ . Potem je  $\operatorname{Im}(zw) > 0$ .
- P** Množica  $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^3 + q < 0\}$  določa Dedekindov rez.
- P** Enačba  $|z - 4| = |z + 4| + 6$  ima neskončno različnih kompleksnih rešitev.
- N** Če je  $A$  omejena množica iracionalnih števil, je tudi njen supremum iracionalno število.
- P** Če za vsak  $\epsilon > 0$  obstaja  $N \in \mathbb{N}$ , da za vsak  $n \geq N$  velja  $|a_n - 1| < \epsilon$ , je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno.
- P** Zaporedje s predpisom  $a_n = \sqrt[n]{n^{2020}}$  je omejeno.
- N** Zaporedje realnih števil s predpisom  $a_n = (1 + \frac{3}{n})^{3n}$  konvergira k 6.
- P** Število  $2020 - \sqrt{e}$  je iracionalno.
- P** Potenčna množica množice naravnih števil je ekvipolentna množici realnih števil.

- (B) **P** Obstaja zaporedje realnih števil, ki ima za stekališča natanko vsa realna števila.
- N** Naj bo  $z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$  in  $w = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})$ . Potem je  $\operatorname{Re}(zw) > 0$ .
- N** Množica  $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^3 - q < 0\}$  določa Dedekindov rez.
- P** Enačba  $|z - 2| = |z + 2| + 2$  ima neskončno različnih kompleksnih rešitev.
- N** Če je  $A$  omejena množica racionalnih števil, je tudi njen supremum racionalno število.
- N** Če za vsak  $N \in \mathbb{N}$  obstaja  $\epsilon > 0$ , da za vsak  $n \geq N$  velja  $|a_n - 1| < \epsilon$ , je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno.
- P** Zaporedje s predpisom  $a_n = \sqrt[n]{2020^{2020}}$  je omejeno.
- N** Zaporedje realnih števil s predpisom  $a_n = (1 - \frac{2}{n})^{2n}$  konvergira k 4.
- N** Število  $\frac{2020}{\sqrt[4]{\pi}}$  je racionalno.
- N** Potenčna množica množice realnih števil je ekvipolentna množici realnih števil.

- (C) **N** Obstaja zaporedje realnih števil, ki ima za stekališča natanko vsa iracionalna števila.
- N** Naj bo  $z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$  in  $w = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})$ . Potem je  $\text{Im}(zw) < 0$ .
- N** Množica  $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^3 - 4q < 0\}$  določa Dedekindov rez.
- P** Enačba  $|z - 3| = |z + 3| + 4$  ima neskončno različnih kompleksnih rešitev.
- N** Če je  $A$  omejena množica racionalnih števil, je tudi njen infimum racionalno število.
- N** Če obstajata  $\epsilon > 0$  in  $N \in \mathbb{N}$ , da za vsak  $n \geq N$  velja  $|a_n - 1| < \epsilon$ , je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno.
- N** Zaporedje s predpisom  $a_n = \sqrt[2020]{2020^n}$  je omejeno.
- N** Zaporedje realnih števil s predpisom  $a_n = (1 + \frac{2}{n})^{2n}$  konvergira k 4.
- N** Število  $2020 + \sqrt[3]{e}$  je racionalno.
- N** Potenčna množica množice naravnih števil je ekvipolentna množici naravnih števil.

(1A) [20 točk]

a) Pokaži, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n-1}.$$

b) S pomočjo izreka o sendviču izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}-n^2}}.$$

*Rešitev:* a) Za dokaz neenakosti bomo uporabili indukcijo.

Baza indukcije: Najprej preverimo, da dobimo pri  $n = 1$  veljavno formulo

$$\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{2-1}.$$

Indukcijski korak: Predpostavimo sedaj, da velja

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n-1},$$

naš cilj pa je, da dokažemo neenakost

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n+1}.$$

Z uporabo induksijske predpostavke dobimo

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2},$$

kar pomeni, da moramo dokazati neenakost

$$2 - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n+1}$$

oziroma

$$\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{4n^2-1}.$$

Ta neenakost pa sledi iz ocene

$$\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{2}{(2n)^2} = \frac{2}{4n^2}.$$

b) Označimo

$$a_n = \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}-n^2}}.$$

Ker so vsi členi pozitivni, je  $a_n \geq 0$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Po drugi strani pa dobimo iz a) dela naloge oceno

$$a_n \leq \left( 1 - \frac{1}{2n-1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}-n^2}}.$$

Limita zaporedja na desni je enaka

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}-n^2}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2n-1} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}-n^2}}, \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2n-1} \frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{(\sqrt{n^4+1}-n^2)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}}, \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{2n-1}} = 0.\end{aligned}$$

Z uporabo izreka o sendviču od tod dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^4+1}-n^2}} = 0.$$

□

- [5] Dokaz baze indukcije in uporaba induksijske predpostavke.
- [5] Dokaz induksijskega koraka.
- [4] Ocení členov zaporedja  $(a_n)$ .
- [4] Izračun limite zgornje meje.
- [2] Uporaba izreka o sendviču in izračun limite zaporedja  $(a_n)$ .

(1B) [20 točk]

a) Pokaži, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n}.$$

b) S pomočjo izreka o sendviču izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}}.$$

*Rešitev:* a) Za dokaz neenakosti bomo uporabili indukcijo.

Baza indukcije: Najprej preverimo, da dobimo pri  $n = 1$  veljavno formulo

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \leq 2 - \frac{1}{2}.$$

Indukcijski korak: Predpostavimo sedaj, da velja

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n},$$

naš cilj pa je, da dokažemo neenakost

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n+2}.$$

Z uporabo induksijske predpostavke dobimo

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2},$$

kar pomeni, da moramo dokazati neenakost

$$2 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq 2 - \frac{1}{2n+2}$$

oziroma

$$\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2}{4n^2+4n}.$$

Ta neenakost pa sledi iz ocene

$$\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq \frac{2}{(2n+1)^2} = \frac{2}{4n^2+4n+1}.$$

b) Označimo

$$a_n = \left( \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}}.$$

Ker so vsi členi pozitivni, je  $a_n \geq 0$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Po drugi strani pa dobimo iz a) dela naloge oceno

$$a_n \leq \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}}.$$

Limita zaporedja na desni je enaka

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^3+1-n\sqrt{n}}}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2n} \frac{1}{\sqrt{n^3+1-n\sqrt{n}}}}, \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2n} \frac{\sqrt{n^3+1+n\sqrt{n}}}{(\sqrt{n^3+1-n\sqrt{n}})(\sqrt{n^3+1+n\sqrt{n}})}}, \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\sqrt{n^3+1+n\sqrt{n}}}{2n}} = 0.\end{aligned}$$

Z uporabo izreka o sendviču od tod dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n^3+1-n\sqrt{n}}}} = 0.$$

□

- [5] Dokaz baze indukcije in uporaba induksijske predpostavke.
- [5] Dokaz induksijskega koraka.
- [4] Ocenil členov zaporedja  $(a_n)$ .
- [4] Izračun limite zgornje meje.
- [2] Uporaba izreka o sendviču in izračun limite zaporedja  $(a_n)$ .

(2A) [15 točk] Poišči vsa naravna števila  $n$ , za katera je število  $\sqrt[n]{n+5}$  racionalno. Svoj odgovor dobro utemelji.

*Rešitev:* Denimo, da je število  $\sqrt[n]{n+5}$  racionalno. To bi pomenilo, da obstajata tuji naravni števili  $k$  in  $l$ , za kateri velja

$$\sqrt[n]{n+5} = \frac{k}{l}.$$

S potenciranjem od tod dobimo enakost

$$l^n(n+5) = k^n.$$

Če bi neko praštevilo  $p$  delilo  $l$ , bi iz zgornje enakosti sledilo, da  $p$  deli tudi  $k$ , kar pa je v protislovju s predpostavko, da sta  $k$  in  $l$  tuji števili. Od tod sklepamo, da je  $l = 1$  in da mora veljati

$$n+5 = k^n.$$

Preverimo lahko, da dobimo pri  $n = 1$  rešitev  $k = 6$  in pri  $n = 3$  rešitev  $k = 2$  ter da pri  $n = 2$  enačba  $k^2 = 7$  nima rešitev. Zato sedaj z indukcijo pokažimo, da za  $n \geq 4$  velja  $k^n > n+5$ , kar bo pomenilo, da enačba nima rešitev. Pri  $n = 4$  je

$$k^4 \geq 2^4 = 16 > 9.$$

Če predpostavimo, da je  $k^n > n+5$ , pa od tod sledi

$$k^{n+1} = k \cdot k^n \geq 2k^n > 2(n+5) = 2n+10 > n+6.$$

Število  $\sqrt[n]{n+5}$  je torej racionalno samo za  $n = 1$  in  $n = 3$ . □

- [6] Dokaz, da mora biti  $\sqrt[n]{n+5}$  naravno število.
- [6] Dokaz, da enačba  $n+5 = k^n$  nima rešitev za  $n \geq 4$ .
- [3] Sklep, da sta  $n = 1$  in  $n = 3$  edini rešitvi.



(2B) [15 točk] Poišči vsa naravna števila  $n$ , za katera je število  $\sqrt[n]{n+2}$  racionalno. Svoj odgovor dobro utemelji.

*Rešitev:* Denimo, da je število  $\sqrt[n]{n+2}$  racionalno. To bi pomenilo, da obstajata tuji naravni števili  $k$  in  $l$ , za kateri velja

$$\sqrt[n]{n+2} = \frac{k}{l}.$$

S potenciranjem od tod dobimo enakost

$$l^n(n+2) = k^n.$$

Če bi neko praštevilo  $p$  delilo  $l$ , bi iz zgornje enakosti sledilo, da  $p$  deli tudi  $k$ , kar pa je v protislovju s predpostavko, da sta  $k$  in  $l$  tuji števili. Od tod sklepamo, da je  $l = 1$  in da mora veljati

$$n+2 = k^n.$$

Preverimo lahko, da dobimo pri  $n = 1$  rešitev  $k = 3$  in pri  $n = 2$  rešitev  $k = 2$ . Zato sedaj z indukcijo pokažimo, da za  $n \geq 3$  velja  $k^n > n+2$ , kar bo pomenilo, da enačba nima rešitev. Pri  $n = 3$  je

$$k^3 \geq 2^3 = 8 > 5.$$

Če predpostavimo, da je  $k^n > n+2$ , pa od tod sledi

$$k^{n+1} = k \cdot k^n \geq 2k^n > 2(n+2) = 2n+4 > n+3.$$

Število  $\sqrt[n]{n+2}$  je torej racionalno samo za  $n = 1$  in  $n = 2$ . □

- [6] Dokaz, da mora biti  $\sqrt[n]{n+2}$  naravno število.
- [6] Dokaz, da enačba  $n+2 = k^n$  nima rešitev za  $n \geq 3$ .
- [3] Sklep, da sta  $n = 1$  in  $n = 2$  edini rešitvi.

(3A) [15 točk]

a) Naj bo  $\varphi \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pokaži, da je

$$i \cdot \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Pomoč:  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ .

b) Podana je kompleksna enačba

$$(z + i)^7 + (z - i)^7 = 0.$$

Pokaži, da so njene rešitve natanko  $z_k = \operatorname{ctg} \left( \frac{1+2k}{14} \pi \right)$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

c) Z Vietovim pravilom pokaži, da je

$$\operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi}{14} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{3\pi}{14} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{5\pi}{14} \right) = 21.$$

**Rešitev:** V točki a) najprej odpravimo kompleksno število v imenovalcu:

$$i \cdot \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} \cdot \frac{\overline{e^{i\varphi} - 1}}{e^{i\varphi} - 1} = i \cdot \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} \cdot \frac{e^{-i\varphi} - 1}{e^{-i\varphi} - 1} = -i \cdot \frac{2i \operatorname{Im}(e^{i\varphi})}{2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\varphi})}.$$

Nadalje ta izraz z namigom poenostavimo v

$$\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Nato enačbo iz točke b) preoblikujemo v

$$\left( \frac{z + i}{z - i} \right)^7 = -1.$$

Sedmi koreni števila  $-1$  so enaki

$$\frac{z_k + i}{z_k - i} = e^{i \frac{1+2k}{7} \pi}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Od tod izrazimo, da je

$$z_k = i \cdot \frac{e^{i \frac{1+2k}{7} \pi} + 1}{e^{i \frac{1+2k}{7} \pi} - 1} = \operatorname{ctg} \left( \frac{1 + 2k}{14} \pi \right).$$

Nazadnje opazimo, da velja

$$(z + i)^7 + (z - i)^7 = 2(z^7 - 21z^5 + 35z^3 - 7) = 0.$$

Če to enačbo delimo z  $2z$  in uvedemo  $w = z^2$ , dobimo

$$w^3 - 21w^2 + 35w - 7 = (w - w_1)(w - w_2)(w - w_3) = 0.$$

Po Vietovem pravilu velja, da je člen pri  $w^2$  enak

$$-21 = -(w_1 + w_2 + w_3).$$

Nadalje pa je treba opaziti, da za rešitve osnovne enačbe velja

$$z_3 = 0, \quad z_0 = -z_4, \quad z_1 = -z_5, \quad z_2 = -z_6.$$

Posledično je

$$w_1 = z_0^2, \quad w_2 = z_1^2, \quad w_3 = z_2^2.$$

Torej velja

$$\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{14}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{5\pi}{14}\right) = 21.$$

**Kriterij:** Podnaloge  $a)$ ,  $b)$  in  $c)$  vsaka po 5 točk.

(3B) [15 točk]

a) Naj bo  $\varphi \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pokaži, da je

$$i \cdot \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Pomoč:  $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ .

b) Podana je kompleksna enačba

$$(z + i)^7 - (z - i)^7 = 0.$$

Pokaži, da so njene rešitve natanko  $z_k = \operatorname{ctg} \left( \frac{k}{7} \pi \right)$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

c) Z Vietovim pravilom pokaži, da je

$$\operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi}{7} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{2\pi}{7} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{3\pi}{7} \right) = 5.$$

**Rešitev:** Za točko a) glej prejšnjo nalogo. Enačbo iz točke b) preoblikujemo v

$$\left( \frac{z + i}{z - i} \right)^7 = 1.$$

Sedmi koreni števila  $+1$  so enaki

$$\frac{z_k + i}{z_k - i} = e^{i \frac{2k}{7} \pi}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Od tod izrazimo, da je

$$z_k = i \cdot \frac{e^{i \frac{2k}{7} \pi} + 1}{e^{i \frac{2k}{7} \pi} - 1} = \operatorname{ctg} \left( \frac{k}{7} \pi \right),$$

pri čemer je ta izraz definiran le za  $k \neq 0$ . Še več, izkaže se, da za  $k = 0$  naša enačba nima rešitve. Nazadnje opazimo, da velja

$$(z + i)^7 - (z - i)^7 = 2i(7z^6 - 35z^4 + 21z^3 - 1) = 0.$$

Če to enačbo delimo z  $14i$  in uvedemo  $w = z^2$ , dobimo

$$w^3 - 5w^2 + 3w - \frac{1}{7} = (w - w_1)(w - w_2)(w - w_3) = 0.$$

Po Vietovem pravilu velja, da je člen pri  $w^2$  enak

$$-5 = -(w_1 + w_2 + w_3).$$

Nadalje pa je treba opaziti, da za rešitve osnovne enačbe velja

$$z_1 = -z_4, \quad z_2 = -z_5, \quad z_3 = -z_6.$$

Posledično je

$$w_1 = z_1^2, \quad w_2 = z_2^2, \quad w_3 = z_3^2.$$

Torej velja

$$\operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi}{7} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{2\pi}{7} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{3\pi}{7} \right) = 5.$$

**Kriterij:** Podnaloge a), b) in c) vsaka po 5 točk.

(4) [15 točk] Preslikava  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je od nekje dalje konstantna, če obstajata naravni števili  $m$  in  $k$ , za kateri velja, da je  $f(n) = k$  za vse  $n \geq m$ .

- a) Naj bo  $\mathcal{A}$  množica vseh preslikav  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ki so od nekje dalje konstantne. Pokaži, da je  $\mathcal{A}$  števna.
- b) Ali enak sklep velja tudi za množico preslikav  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , ki so od nekje naprej konstantne? Svoj odgovor dobro utemelji.

**Rešitev:** Če je preslikava  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  od nekje dalje konstantna, to pomeni, da je

$$Z_f = \{f(1), f(2), \dots, f(m)\} \subset \mathbb{N}.$$

Torej lahko množico takih preslikav  $\mathcal{A}$  identificiramo z množico vseh nepraznih končnih podmnožic naravnih števil. Za slednjo smo števnost dokazali na vajah (naloga 20). Alternativna rešitev je, da opazimo, da je vseh možnih preslikav, ki so od  $m \in \mathbb{N}$  dalje konstantne natanko  $\mathbb{N}^m$ . Torej je

$$|\mathcal{A}| = |\cup_{m=1}^{\infty} \mathbb{N}^m|.$$

Ker imamo na desni strani števno unijo števnih množic, je tudi  $\mathcal{A}$  števna.

Naj bo sedaj od nekje dalje konstantna preslikava  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Za razliko od točke a) njena zaloga vrednosti ni nujno končna. Res, ob primernem izboru vrednosti  $f(n)$ ,  $n \leq m$ , lahko na primer dosežemo, da je  $Z_f$  enaka kar  $\mathbb{Z}$  ali katerikoli njeni podmnožici. V posebnem, obstaja injektivna preslikava iz potenčne množice  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  v množico vseh takih preslikav. Ker  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  ni števna, tudi  $\mathcal{A}$  ne more biti.

**Kriterij:** Podnaloga a) 10 točk, podnaloga b) (samo) z utemeljitvijo 5 točk.

(5) [15 točk]

- a) Naj bo  $(a_n)$  konvergentno zaporedje realnih števil z limito  $a$  in  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  injektivna preslikava. Pokaži, da je potem tudi zaporedje  $(b_n)$  s predpisom  $b_n = a_{\sigma(n)}^2$  konvergentno in izračunaj njegovo limito.
- b) Naj bo  $(c_n)$  zaporedje realnih števil, za katerega velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{2n} - c_n) = 0$ . Ali je zaporedje  $(c_n)$  nujno Cauchyjevo? Svoj odgovor dobro utemelji.

*Rešitev:* a) Definirajmo najprej zaporedje  $(d_n)$  s predpisom  $d_n = a_{\sigma(n)}$  in pokažimo, da konvergira k  $a$ . Izberimo poljuben  $\epsilon > 0$ . Ker zaporedje  $(a_n)$  konvergira k  $a$ , lahko najdemo tak  $N \in \mathbb{N}$ , da velja

$$|a_n - a| < \epsilon$$

za vse  $n \geq N$ . Ker je  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  injektivna preslikava, obstaja samo končno mnogo naravnih števil  $n$ , za katere je  $\sigma(n) < N$ . To pomeni, da obstaja  $N' \in \mathbb{N}$ , da velja  $\sigma(n) > N$  za  $n \geq N'$ . Za  $n \geq N'$  torej velja

$$|d_n - a| < \epsilon.$$

Ker je zaporedje  $(d_n)$  konvergentno, je konvergentno tudi zaporedje  $(b_n)$  in velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^2 = a^2.$$

b) Zaporedje  $(c_n)$  ni nujno konvergentno. Protiprimer je npr. zaporedje, ki je dano s predpisom

$$c_n = \begin{cases} 1 & ; n = 2^k, k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Za to zaporedje velja  $c_{2n} - c_n = 0$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ , kar pomeni, da zadošča pogojem naloge. Vendar pa ni Cauchyjevo, saj ima dve stekališči 0 in 1.  $\square$

- [6] Dokaz, da zaporedje  $(d_n)$  konvergira k  $a$ .
- [3] Dokaz, da zaporedje  $(b_n)$  konvergira k  $a^2$ .
- [6] Dokaz, da zaporedje  $(c_n)$  ni nujno Cauchyjevo.