

Analiza 1: 3. kolokvij

Rešitve

(A) [20 točk]

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna

P oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

N Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem je funkcija $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, odvedljiva.

P Obstajajo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, da je $\int \frac{x^2+4}{\sqrt{9-x^2}} dx = (Ax+B)\sqrt{9-x^2} + C \arcsin(\frac{x}{3}) + D$.

N Če je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo monotona in odvedljiva, odvod nima ničel.

P Za vsak $n \in \mathbb{N}$ leži vrednost $\ln(n+1) - \ln(n)$ na intervalu $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

N Če je odvedljiva funkcija $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno zvezna, je funkcija f' omejena na $(0, 1)$.

P Vsaka zvezno odvedljiva krivulja $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ima končno dolžino.

N Naj bo $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zvezna funkcija. Če obstaja posplošeni integral $\int_1^\infty f(x) dx$, obstaja tudi limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

P Premica $x = -1$ je tangentna na krivuljo v \mathbb{R}^2 s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ za $t \in \mathbb{R}$.

N Obstaja odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki ni zvezna v točki $x = 0$.

P Vsaka Riemannovo integrabilna funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je omejena.

(B) [20 točk]

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna

☐ P oziroma napačna ☐ N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

☐ P Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, odvedljiva.

☐ P Obstajajo $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, da je $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{4-x^2}} dx = (Ax+B)\sqrt{4-x^2} + C \arcsin(\frac{x}{2}) + D$.

☐ N Če je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naraščajoča odvedljiva funkcija, je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

☐ P Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je vrednost $\arctan(n+1) - \arctan(n)$ manjša od $\frac{1}{1+n^2}$.

☐ N Če je $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, je f enakomerno zvezna na $(0, 1)$.

☐ N Vsaka zvezno odvedljiva krivulja $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ima končno dolžino.

☐ N Naj bo $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zvezna funkcija. Če obstaja posplošeni integral $\int_1^\infty f(x) dx$, obstaja tudi limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

☐ P Premica $y = 1$ je tangentna na krivuljo v \mathbb{R}^2 s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$ za $t \in \mathbb{R}$.

☐ P Vsaka odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna.

☐ N Vsaka Riemannovo integrabilna funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna.

(C) [20 točk]

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna

P oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

N Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem obstaja odvedljiva funkcija $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (0, 1)$.

N Obstajajo $A, B, C \in \mathbb{R}$, da je $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx = (A + Bx) \arcsin(\frac{x}{4}) + C$.

N Če je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ padajoča odvedljiva funkcija, je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

N Obstaja $n \in \mathbb{N}$, za katerega leži vrednost $\ln(n+1) - \ln(n)$ izven intervala $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

N Če je odvedljiva funkcija $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ omejena, je funkcija f enakomerno zvezna na $(0, 1)$.

N Obstaja zvezno odvedljiva krivulja $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki ima neskončno dolžino.

N Naj bo $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zvezna funkcija. Če obstaja posplošeni integral $\int_1^\infty f(x) dx$, obstaja tudi limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

N Premica $x = 1$ je tangentna na krivuljo v \mathbb{R}^2 s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$ za $t \in \mathbb{R}$.

N Če je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva, je zvezno odvedljiva.

N Vsaka omejena funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna.

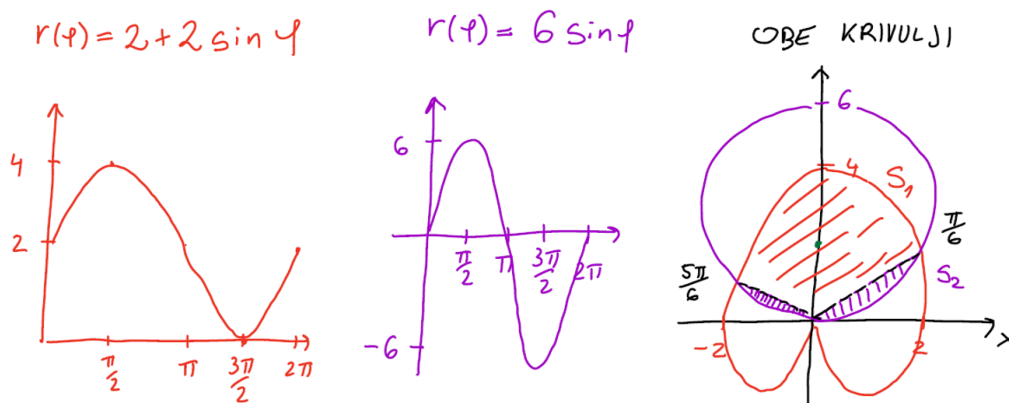
(1) [20 točk] Ravninski krivulji sta v polarnih koordinatah podani s predpisoma

$$r(\varphi) = 2 + 2 \sin \varphi \text{ in } r(\varphi) = 6 \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi].$$

(a) Skiciraj grafa odvisnosti $r(\varphi)$ in nato skiciraj krivulji.

(b) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji in ki vsebuje točko $(0, 2)$.

Rešitev: Gre za grafa dveh preprostih kotnih funkcij, ki pri pogoju $r(\varphi) \geq 0$ podajata dve krivulji.



Izračunajmo pri katerem polarnem kotu se krivulji sekata:

$$2 + 2 \sin \varphi = 6 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Iskano ploščino izračunamo kot vsoto dveh ploščin S_1 in S_2 (na sliki). Če upoštevamo simetrijo, dobimo

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2 \sin \varphi)^2 d\varphi + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 36 \sin^2 \varphi d\varphi = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} + 2\pi \right) + \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} \right) = 5\pi.$$

Pri ostalih verzijah nalog dobimo skice, ki so zarotirane za kot $\frac{\pi}{2}$, π ali $\frac{3\pi}{2}$. Ustrezno pa se spremenijo tudi integrali.

Točkovnik:

- +8 Skica odvisnosti in obeh krivulj.
- +2 Izračun presečišč.
- +4 Izbor ustrezne formule za ploščino.
- +6 Izračun določenih integralov.

(2) [20 točk] Izračunaj integrala

a) $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} dx,$

b) $\int e^{-4x} \cos(e^{-2x}) dx.$

Nasvet za b): Integracija po delih.

Rešitev: V prvi integral uvedemo $t = \sqrt[6]{x}$ oz. $dx = 6t^5 dt$, nato pa ga delimo. Dobimo

$$\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} dx = 6 \int \frac{t^6-1}{t^4(t+1)} dt = 6 \int (t-1) dt + 6 \int \frac{t^4-1}{t^4(t+1)} dt.$$

Prvi integral je preprost, pri drugem pa velja

$$\int \frac{t^4-1}{t^4(t+1)} dt = A \ln |t| + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3} + E \ln |t+1| + F.$$

Konstante so enake $A = B = 1$, $C = -1/2$, $D = 1/3$, $E = 0$, tako dobimo

$$\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} dx = 6 \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{6} \ln |x| + x^{-\frac{1}{6}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} \right) + C.$$

Komentar: Integracijo racionalne funkcije je mogoče opraviti tudi na lažji način, če opazimo, da je

$$\frac{t^6-1}{t^4(t+1)} = \frac{(t^3-1)(t+1)(t^2-t+1)}{t^4(t+1)} = t-1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4}.$$

Ta integral je bil enak v vseh verzijah kolokvija.

Pri drugem integralu je ključen izbor $u = e^{-2x}$ in $dv = e^{-2x} \cos(e^{-2x}) dx$. Tako dobimo

$$du = -2e^{-2x} dx,$$

$$v = \int e^{-2x} \cos(e^{-2x}) dx = -\frac{1}{2} \int \cos t dt = -\frac{1}{2} \sin(e^{-2x}),$$

pri čemer smo pri izračunu za v uvedli $t = e^{-2x}$. Isto spremenljivko uporabimo tudi za dokončanje izračuna

$$\begin{aligned} \int e^{-4x} \cos(e^{-2x}) dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin(e^{-2x}) - \int e^{-2x} \sin(e^{-2x}) dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin(e^{-2x}) + \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin(e^{-2x}) - \frac{1}{2} \cos(e^{-2x}) + C. \end{aligned}$$

Druga možnost pa je, da najprej uvedemo substitucijo $t = e^{-2x}$ in pridelamo integral

$$\int e^{-2x} \cos(e^{-2x}) dx = -\frac{1}{2} \int t \sin t dt.$$

Tovrstne integrale smo z integracijo po delih reševali že na vajah. Pri ostalih verzijah integrala uporabimo isto idejo.

Točkovnik:

+3 Substitucija za prvi integral.

+7 Izračun integrala racionalne funkcije.

+10 Pravilna integracija po delih.

(3) [10 točk] V odvisnosti od realnega števila $a > 0$ obravnavaj konvergenco integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}|x-a|^{2a}} dx.$$

Rešitev: Integral ima singularnosti v $x = 0$, $x = a$ in $x = \infty$. Prva singularnost je zgolj navidezna, saj po L'Hospitalovem pravilu velja

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}|x-a|^{2a}} = \frac{1}{a^{2a}} \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{a^{2a}} \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x} = 0.$$

V primeru pola $x = a$ lahko zapišemo

$$\frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}|x-a|^{2a}} = \frac{\frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}}}{|x-a|^{2a}} = \frac{g_1(x)}{|x-a|^{2a}}.$$

Ker je $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) \neq 0$, integral obstaja natanko tedaj, ko je $2a < 1$ oz. $a < \frac{1}{2}$. Nazadnje obravnavamo še singularnost v neskončnosti. Tam za vsak $\epsilon > 0$ velja

$$\frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}|x-a|^{2a}} = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x^{\epsilon}|1-\frac{a}{x}|^{2a}}}{x^{\frac{1}{3}+2a-\epsilon}} = \frac{g_2(x)}{x^{\frac{1}{3}+2a-\epsilon}}.$$

Tokrat velja $\lim_{x \rightarrow \infty} g_2(x) = 0$ (L'Hospitalovo pravilo). Integral obstaja za $\frac{1}{3} + 2a - \epsilon > 1$. Ker je $\epsilon > 0$ poljubno število, od tod dobimo pogoj $a > \frac{1}{3}$. Ker pa je bila limita g_2 ničelna to še ni zaključek naloge. Naj bo $\frac{1}{3} + 2a \leq 1$. Potem velja

$$\frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}|x-a|^{2a}} = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x|1-\frac{a}{x}|^{2a}}}{x^{\frac{1}{3}+2a-1}} = \frac{g_3(x)}{x^{\frac{1}{3}+2a-1}}.$$

Velja $\lim_{x \rightarrow \infty} g_3(x) = 1$ (L'Hospitalovo pravilo) in $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}+2a-1}} = \infty$. Torej integral v tem primeru ne obstaja. Območje konvergence je $a \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Komentar: V večini rešitev je manjkala utemeljitev, zakaj je integral divergenten za $a \leq \frac{1}{3}$. Nekateri ste to skušali utemeljevati z dejstvom, da 'logaritem ni pomemben', kar ni bilo priznано kot popolna rešitev. Za rešitev, kjer razlaga tega dela ni bila dovolj prepričljiva, sem odbil dve točki. Vse ostale verzije naloge se obravnava na enak način, spremenijo se le meje konvergenčnega intervala.

Točkovnik:

+3 Obravnavanje za $x = 0$.

+3 Obravnavanje za $x = a$.

+4 Obravnavanje za $x = \infty$.

(4) [15 točk]

(a) Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, za katero je $f(0) = 0$. Izračunaj limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Ali obstaja odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $f(n) = \frac{1}{n!}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$?
Odgovor dobro utemelji!

Rešitev

(a) Uvedimo novo spremenljivko $x = \frac{1}{n}$. Ko gre $n \rightarrow \infty$, gre $x \rightarrow 0$ in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

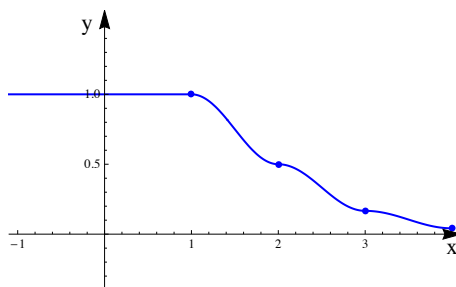
Ko upoštevamo, da je $f(0) = 0$, tako dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0).$$

(b) Odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $f(n) = \frac{1}{n!}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, obstaja. Dobimo pa jo lahko kot zlepek funkcij, ki imajo v naravnih številih stacionarne točke. Možnosti je veliko, ena možna izbira pa je, da zlepimo kosinusne funkcije. Za $x \leq 1$ najprej definirajmo $f(x) = 1$. Nato pa za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo funkcijo f na intervalu $[n, n+1]$ s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{n!} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) (\cos(\pi(x-n)) - 1).$$

Preverimo lahko, da za takšen zlepek velja, da je $f(n) = \frac{1}{n!}$ in $f'(n) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.



- [7] Izračun limite.
- [5] Geometrični opis odvedljive funkcije, ki zadošča danim pogojem.
- [3] Zapis predpisa iskane funkcije.

- (5) [15 točk] Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in naj bo $M = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$. Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{M}{n}.$$

Rešitev:

Najprej bomo določeni integral zapisali kot vsoto

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(t) dt.$$

Na vsakem od intervalov $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, za $k = 1, 2, \dots, n$, lahko sedaj uporabimo bodisi izrek o povprečni vrednosti za funkcijo f ali pa Lagrangeev izrek za primitivno funkcijo funkcije f , da dobimo točko $t_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, za katero je

$$\frac{f(t_k)}{n} = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt.$$

Tako pridemo do enakosti

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t_k)) \right|.$$

Za vsak člen v zgornji vsoti lahko sedaj uporabimo Lagrangeev izrek, da dobimo točko $c_k \in [t_k, \frac{k}{n}]$, za katero je

$$f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t_k) = f'(c_k)\left(\frac{k}{n} - t_k\right).$$

Ker je $t_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, je $|\frac{k}{n} - t_k| \leq \frac{1}{n}$. Skupaj z oceno $|f'(c_k)| \leq M$ in uporabo trikotniške neenakosti tako dobimo

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t_k)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{M}{n} = \frac{M}{n}.$$

- [5] Razbitje integrala na vsoto.
- [5] Uporaba izreka o povprečni vrednosti.
- [5] Uporaba Lagrangeevega izreka in dokaz neenakosti.