

Rešitve 2. kolokvija iz Analize 1

- (A) **N** Če za vsak $x \in [1, 3]$ velja $|f(x) - f(2)| \leq |x - 2|$, je f enakomerno zvezna na $[1, 3]$.
- P** Če za funkcijo $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f'(0) = 1$, obstaja $x > 0$, da je $f(x) > f(0)$.
- P** Če je $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$, obstaja zaporedje (a_n) z lastnostma $a_n \rightarrow 0$ in $f(a_n) \rightarrow \infty$.
- P** Obstaja natanko eno število $a > 0$, pri katerem se grafa funkcij e^{ax} in e^{-ax} sekata pod pravim kotom.
- N** Če je produkt funkcij $f \cdot g$ odvedljiv v točki $x = 0$, sta taki tudi funkciji f in g .
- P** Funkcije $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ ne moremo zvezno razširiti na celo realno os.
- N** Funkcija f je zvezna na \mathbb{R} . Če velja $f(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{Q}$, velja tudi $f(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- N** Funkcija, ki je konstantna na gosti podmnožici realnih števil, je konstantna tudi na \mathbb{R} .
- P** Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\operatorname{arsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$.
- N** Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ surjektivna in $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektivna. Potem je $g \circ f$ injektivna.

- (B) **N** Če za vsak $x \in [0, 2]$ velja $|f(x) - f(1)| \leq |x - 1|$, je f enakomerno zvezna na $[0, 2]$.
- P** Če za funkcijo $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f'(0) = -1$, obstaja $x > 0$, da je $f(x) < f(0)$.
- P** Če je $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$, obstaja zaporedje (a_n) z lastnostma $a_n \rightarrow 0$ in $f(a_n) \rightarrow -\infty$.
- P** Obstaja natanko eno število $a > 0$, pri katerem se grafa funkcij $a \ln x$ in $-a \ln x$ sekata pod pravim kotom.
- P** Če je funkcija $\frac{1}{f}$ odvedljiva v točki $x = 0$, je taka tudi funkcija f .
- P** Funkcije $f(x) = \frac{x}{|\sin x|}$ ne moremo zvezno razširiti na celo realno os.
- P** Funkcija f je zvezna na \mathbb{R} . Če velja $f(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, velja tudi $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{Q}$.
- N** Funkcija, ki je konstantna na gosti podmnožici realnih števil, je konstantna tudi na \mathbb{R} .
- P** Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}(x)) = x$.
- N** Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bijektivna in $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surjektivna. Potem je $g \circ f$ injektivna.

(C) **N** Če za vsak $x \in [1, 5]$ velja $|f(x) - f(3)| \leq |x - 3|$, je f enakomerno zvezna na $[1, 5]$.

N Če za funkcijo $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f'(0) = 0$, obstaja $x > 0$, da je $f(x) > f(0)$.

P Če je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, obstaja zaporedje (a_n) z lastnostma $a_n \rightarrow \infty$ in $f(a_n) \rightarrow 0$.

P Obstaja natanko eno število $a > 0$, pri katerem se grafa funkcij $a\sqrt{x}$ in $\frac{a}{x}$ sekata pod pravim kotom.

N Če je kvocient funkcij $\frac{f}{g}$ odvedljiv v točki $x = 0$, sta taki tudi funkciji f in g .

P Funkcije $f(x) = \frac{|\sin \pi x|}{\pi x}$ ne moremo zvezno razširiti na celo realno os.

N Funkcija f je zvezna na \mathbb{R} . Če velja $f(x) < 0$ za vsak $x \in \mathbb{Q}$, velja tudi $f(x) < 0$ za vsak $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

N Funkcija, ki je konstantna na gosti podmnožici realnih števil, je konstantna tudi na \mathbb{R} .

P Za vsak $x \geq 0$ velja $\operatorname{arch}(\operatorname{ch}(x)) = x$.

N Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ surjektivna in $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injektivna. Potem je $g \circ f$ bijektivna.

(1A) [10 točk] Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom $f(x) = \frac{2e^x - 3e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}}$.

- a) Pokaži, da je f injektivna in izračunaj njeno zalogo vrednosti Z_f .
- b) Izračunaj predpis za inverz $f^{-1} : Z_f \rightarrow \mathbb{R}$.

Rešitev: a) Injektivnost funkcije najlažje dokažemo z odvodom. Izračunamo lahko, da je

$$f'(x) = \frac{24}{(2e^x + 3e^{-x})^2}.$$

Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ je funkcija f strogo naraščajoča in posledično injektivna. Iz limit:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 3e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - 3e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}} = 1,\end{aligned}$$

sledi, da je $Z_f = (-1, 1)$.

b) Računajmo:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2e^y - 3e^{-y}}{2e^y + 3e^{-y}}, \\ x(2e^y + 3e^{-y}) &= 2e^y - 3e^{-y}, \\ e^y(2x - 2) &= e^{-y}(-3 - 3x), \\ e^{2y} &= \frac{3 + 3x}{2 - 2x}, \\ y &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3 + 3x}{2 - 2x} \right).\end{aligned}$$

Od tod dobimo predpis za inverz

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3 + 3x}{2 - 2x} \right).$$

□

- [4] Dokaz injektivnosti funkcije f .
- [2] Izračun zaloge vrednosti funkcije f .
- [4] Izračun predpisa inverza funkcije f .

(1B) [10 točk] Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom $f(x) = \frac{3e^x + 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- a) Pokaži, da je f injektivna in izračunaj njeno zalogo vrednosti Z_f .
- b) Izračunaj predpis za inverz $f^{-1} : Z_f \rightarrow \mathbb{R}$.

Rešitev: a) Injektivnost funkcije najlažje dokažemo z odvodom. Izračunamo lahko, da je

$$f'(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ je funkcija f strogo naraščajoča in posledično injektivna. Iz limit:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x + 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^x + 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 3,\end{aligned}$$

sledi, da je $Z_f = (2, 3)$.

b) Računajmo:

$$\begin{aligned}x &= \frac{3e^y + 2e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \\ x(e^y + e^{-y}) &= 3e^y + 2e^{-y}, \\ e^y(x - 3) &= e^{-y}(2 - x), \\ e^{2y} &= \frac{2 - x}{x - 3}, \\ y &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 - x}{x - 3} \right).\end{aligned}$$

Od tod dobimo predpis za inverz

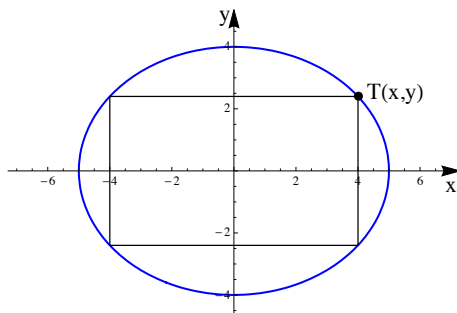
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 - x}{x - 3} \right).$$

□

- [4] Dokaz injektivnosti funkcije f .
- [2] Izračun zaloge vrednosti funkcije f .
- [4] Izračun predpisa inverza funkcije f .

- (2A) [15 točk] V elipso s polosema $a = 5$ in $b = 4$ včrtamo pravokotnik, ki ima stranici vzporedni polosema elipse. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino. Kolikšna je ta ploščina?

Rešitev: Izberimo si koordinatni sistem tako, da bo elipsa imela enačbo $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Včrtane pravokotnike, ki zadoščajo pogojem naloge, bomo parametrizirali z x koordinato zgornjega desnega oglišča.



To oglišče ima potem y koordinato enako $y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$, pravokotnik pa ima stranici dolgi $2x$ in $2y$. Od tod dobimo formulo za ploščino pravokotnika

$$S(x) = 2x \cdot 2y = 16x\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}},$$

naša naloga pa je, da poiščemo maksimum funkcije $S : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Odvod funkcije S je enak

$$S'(x) = 16 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} - \frac{\frac{x^2}{25}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}} \right).$$

Od tod sledi, da stacionarne točke funkcije S zadoščajo enačbi:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} - \frac{\frac{x^2}{25}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}} &= 0, \\ 1 - \frac{x^2}{25} - \frac{x^2}{25} &= 0, \\ x^2 &= \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, 5]$ imamo torej eno stacionarno točko $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Ker je funkcija S odvedljiva na $(0, 5)$ sta kandidata za maksimum funkcije S poleg stacionarne točke še obe krajišči, kjer pa velja $S(0) = S(5) = 0$. Od tod sledi, da ima največjo ploščino pravokotnik z zgornjim desnim ogliščem $T(\frac{5}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$, njegova ploščina pa je

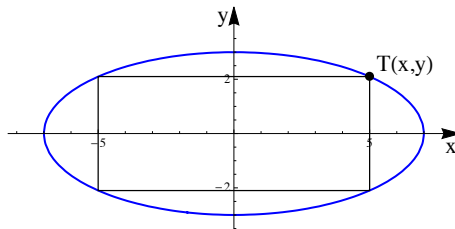
$$S_{\max} = 40.$$

□

- [6] Formulacija ekstremalnega problema in zapis funkcije S .
- [6] Izračun stacionarne točke in utemeljitev, da ima tam funkcija S maksimum.
- [3] Izračun maksimalne ploščine.

- (2B) [15 točk] V elipso s polosema $a = 7$ in $b = 3$ včrtamo pravokotnik, ki ima stranici vzporedni polosema elipse. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino. Kolikšna je ta ploščina?

Rešitev: Izberimo si koordinatni sistem tako, da bo elipsa imela enačbo $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$. Včrtane pravokotnike, ki zadoščajo pogojem naloge, bomo parametrizirali z x koordinato zgornjega desnega oglišča.



To oglišče ima potem y koordinato enako $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}$, pravokotnik pa ima stranici dolgi $2x$ in $2y$. Od tod dobimo formulo za ploščino pravokotnika

$$S(x) = 2x \cdot 2y = 12x\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}},$$

naša naloga pa je, da poiščemo maksimum funkcije $S : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$. Odvod funkcije S je enak

$$S'(x) = 12 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} - \frac{\frac{x^2}{49}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}} \right).$$

Od tod sledi, da stacionarne točke funkcije S zadoščajo enačbi:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} - \frac{\frac{x^2}{49}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}} &= 0, \\ 1 - \frac{x^2}{49} - \frac{x^2}{49} &= 0, \\ x^2 &= \frac{49}{2}. \end{aligned}$$

Na intervalu $[0, 7]$ imamo torej eno stacionarno točko $x = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Ker je funkcija S odvedljiva na $(0, 7)$ sta kandidata za maksimum funkcije S poleg stacionarne točke še obe krajišči, kjer pa velja $S(0) = S(7) = 0$. Od tod sledi, da ima največjo ploščino pravokotnik z zgornjim desnim ogliščem $T(\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$, njegova ploščina pa je

$$S_{\max} = 42.$$

□

- [6] Formulacija ekstremalnega problema in zapis funkcije S .
- [6] Izračun stacionarne točke in utemeljitev, da ima tam funkcija S maksimum.
- [3] Izračun maksimalne ploščine.

(3A) [20 točk] Naj bo $f(x) = \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$

- a) Določi definicijsko območje D_f .
- b) Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- c) Dokaži, da ima enačba $f(x) = x^4$ vsaj dve rešitvi na D_f .

Rešitev: Veljati mora $x \neq 0$ in $\frac{3+x}{3-x} > 0$. Torej je $D_f = (-3, 0) \cup (0, 3)$. Nadalje velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{3+x}{3-x} \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{2x}{3-x} \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \ln e^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Limito je možno rešiti tudi z L'Hospitalovim pravilom:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3-x}{3+x} \cdot \frac{6}{(3-x)^2}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Sedaj funkcijo f razširimo do zvezne funkcije $\tilde{f}: (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\tilde{f}(0) = \frac{1}{3}$. Nato si ogledamo funkcijo

$$g(x) = \tilde{f}(x) - x^4.$$

Opazimo, da zanjo velja $g(0) > 0$ in $g(\pm 1) < 0$. To pomeni, da ima na intervalih $(-1, 0)$ in $(0, 1)$ vsaj po eno ničlo, kar ustreza želenima rešitvama v našem primeru.

Kriterij:

- [+6] Definicijsko območje.
- [+7] Izračun limite.
- [+7] Dokaz točke c).

(3B) [20 točk] Naj bo $f(x) = \frac{1}{x} \ln \sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}$

- a) Določi definicijsko območje D_f .
- b) Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- c) Dokaži, da ima enačba $f(x) = x^2$ vsaj dve rešitvi na D_f .

Rešitev: Veljati mora $x \neq 0$ in $\frac{2+x}{2-x} > 0$. Torej je $D_f = (-2, 0) \cup (0, 2)$. Nadalje velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{2x}{2-x} \right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} \ln e = \frac{1}{3}.$$

Limito je možno rešiti tudi z L'Hospitalovim pravilom:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2-x}{2+x} \cdot \frac{4}{(2-x)^2}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Sedaj funkcijo f razširimo do zvezne funkcije $\tilde{f}: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\tilde{f}(0) = \frac{1}{3}$. Nato si ogledamo funkcijo

$$g(x) = \tilde{f}(x) - x^2.$$

Opazimo, da zanjo velja $g(0) > 0$ in $g(\pm 1) < 0$. To pomeni, da ima na intervalih $(-1, 0)$ in $(0, 1)$ vsaj po eno ničlo, kar ustreza želenima rešitvama v našem primeru.

Kriterij:

- [+6] Definicijsko območje.
- [+7] Izračun limite.
- [+7] Dokaz točke c).

(4) [20 točk] Pri reševanju naslednjih nalog si pomagaj z definicijo enakomerne zveznosti.

- Naj bo f zvezna na \mathbb{R} in naj obstajata limiti $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ter $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Dokaži, da je f omejena in enakomerno zvezna na \mathbb{R} .
- Dokaži ali ovrzi s primerom: Če je f enakomerno zvezna na \mathbb{R} , je taka tudi funkcija f^2 .
- Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno zvezna funkcija. Pokaži, da jo lahko zvezno razširimo na zaprt interval $[a, b]$.

Rešitev: a) Označimo limiti z $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ in $D = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Potem obstajata števili a in b , da velja:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |L| + 1 \text{ za } x \in (-\infty, a], \\ |f(x)| &\leq |D| + 1 \text{ za } x \in [b, \infty). \end{aligned}$$

Ker je funkcija f zvezna na $[a, b]$, je tam omejena, zato obstaja število M , da je $|f(x)| \leq M$ za $x \in [a, b]$. Od tod sledi, da je f na \mathbb{R} omejena s številom $\max\{|L| + 1, |D| + 1, M\}$.

Za dokaz enakomerne zveznosti funkcije f na \mathbb{R} najprej izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Podobno kot prej lahko najdemo števili $a < b$, da velja:

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &< \frac{\epsilon}{2} \text{ za } x \in (-\infty, a], \\ |f(x) - D| &< \frac{\epsilon}{2} \text{ za } x \in [b, \infty). \end{aligned}$$

Ker je f enakomerno zvezna na intervalu $[a - 1, b + 1]$, obstaja $0 < \delta < 1$, da velja $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ za poljubna $x, y \in [a - 1, b + 1]$, ki zadoščata pogoju $|x - y| < \delta$. Če vzamemo sedaj poljubna $x, y \in \mathbb{R}$, ki zadoščata pogoju $|x - y| < \delta$ in ne ležita oba v $[a - 1, b + 1]$, morata obe hkrati ležati v enem izmed intervalov $(-\infty, a]$ ali $[b, \infty)$. Če sta na primer oba v $(-\infty, a]$, dobimo z uporabo trikotniške neenakosti oceno

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L - (f(y) - L)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Podoben argument deluje tudi v primeru, ko sta x in y oba v $[b, \infty)$.

b) Vzemimo funkcijo $f(x) = x$. S predavanj vemo, da je f enakomerno zvezna na \mathbb{R} , $f^2(x) = x^2$ pa ne. Torej trditev ne velja.

c) Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno zvezna funkcija. S predavanj vemo, da je potem f na (a, b) omejena. Če torej definiramo zaporedje $a_n = a + \frac{1}{n}$, je posledično zaporedje $f(a_n)$ omejeno. Zato obstaja podzaporedje (b_n) zaporedja (a_n) , za katerega obstaja limita

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

Pokažimo, da je L desna limita funkcije f v točki a . V ta namen vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je f enakomerno zvezna na (a, b) , obstaja $\delta > 0$, da velja $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ za poljubna $x, y \in (a, b)$, za katera je $|x - y| < \delta$. V posebnem to pomeni, da za $x, y \in (a, a + \delta)$ velja $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ker zaporedje (b_n) konvergira k a , obstaja nek člen $b_n \in (a, a + \delta)$, za katerega velja $|f(b_n) - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Od tod pa potem sledi, da za $x \in (a, a + \delta)$ velja

$$|f(x) - L| = |f(x) - f(b_n) + f(b_n) - L| \leq |f(x) - f(b_n)| + |f(b_n) - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Podobno lahko dokažemo tudi, da ima f v točki b levo limito. □

- [4] Dokaz, da je f omejena.
- [6] Dokaz, da je f enakomerno zvezna.
- [4] Protiprimer, ki pokaže, da kvadrat ni nujno enakomerno zvezen.
- [2] Opazka, da je f na (a, b) omejena.
- [4] Dokaz obstoja limit funkcije f v robnih točkah.

(5) [15 točk] Množica $A \subseteq \mathbb{R}$ je podana kot števna unija zaprtih intervalov $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

- a) Za $x \in A$ naj bo $n(x) \in \mathbb{N}$ najmanjše naravno število z lastnostjo $x \in [a_{n(x)}, b_{n(x)}]$. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n(x)}, & x \in \mathbb{Q} \cap A, \\ -\frac{1}{n(x)}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap A, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

Pokaži, da je f zvezna natanko na komplementu množice A .

- b) Ali trditev iz točke a) drži tudi, če je A podana kot števna unija odprtih intervalov? Svoj odgovor utemelji.

Rešitev: Za vsak $a \in A \cap \mathbb{Q}$ velja $f(a) > 0$. Nadalje pa obstaja tudi iracionalno zaporedje z lastnostma $a_n \rightarrow a$ in $f(a_n) \leq 0$. To pomeni, da f ni zvezna v a . Na podoben način obravnavamo tudi $a \in A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, kjer je $f(a) < 0$.

Dokaz dejstva, da je f zvezna v vsaki točki $a \in \mathbb{R} \setminus A$ je težji, kot se zdi na prvi pogled. Argument, da gre za funkcijo, ki je na komplementu množice A konstantno enaka ničelni namreč ne zadošča. Za ilustracijo si oglejmo primer, ko je

$$A = \bigcup_{n=3}^{\infty} [1/n, 1 - 1/n] = (0, 1).$$

V tem primeru je $f = 0$ na $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, vendar pa moramo dodatno utemeljiti, zakaj je zvezna tudi v točkah $a = 0$ in $a = 1$. To je res zaradi dejstva, da za dovolj majhno število $\delta > 0$ iz pogoja $|x| < \delta$ in $|x - 1| < \delta$ sledi, da je bodisi $x \in \mathbb{R} \setminus A$ ali pa je $f(x) = \pm \frac{1}{n}$ za nek $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $\frac{1}{n} < \epsilon$. Res, tega pogoja ne izpolnjuje le končno mnogo naravnih števil, zato je tak δ res mogoče izbrati.

V splošnem moramo torej ločiti dva primera. Recimo, da obstaja majhen $\delta > 0$, da je

$$I_{\delta}^a = (a - \delta, a + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus A.$$

Potem je $f = 0$ zvezna na celim I_{δ}^a . Če lahko $\mathbb{R} \setminus A$ zapišemo kot števno unijo odprtih intervalov, to drži za vsak $a \in \mathbb{R} \setminus A$. Vendar pa ta situacija ni povsem splošna, saj v splošnem velja

$$\mathbb{R} \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} ((-\infty, a_n) \cup (b_n, \infty)),$$

števen presek odprtih intervalov pa je lahko (kot zgoraj) sestoji iz zaprtih intervalov in tudi izoliranih točk. To pomeni, da obstajajo tudi števila $a \in \mathbb{R} \setminus A$, za katera vsak interval I_{δ}^a , $\delta > 0$, seka tudi množico A . Vseeno pa opazimo, da z manjšanjem števila $\delta > 0$ monotono narašča tudi najmanjše število $n \in \mathbb{N}$, pri katerem je $A \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Povedano drugače, če gre $a_n \rightarrow a$, za nekatere člene velja $f(a_n) = 0$ za druge pa $f(a_n) = \pm \frac{1}{n} \rightarrow 0$. To potrjuje, da lahko za poljuben $\epsilon > 0$ izberemo majhen δ , da iz $|x - a| < \delta$ sledi tudi $|f(x)| < \epsilon$.

Odgovor na vprašanje v trditvi b) je negativen, pri utemeljitvi pa je znova potrebno obravnavati krajišča morebitnih zaprtih intervalov v $\mathbb{R} \setminus A$. Vzemimo na primer $A = (0, 1)$. Potem obravnavamo funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1), \\ -1, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

Ta funkcija ni zvezna v točkah 0 in 1, ki pa sta v komplementu množice A .

Kriterij:

[+5] Nezveznost v $a \in A$.

[+5] Zveznost v $a \in \mathbb{R} \setminus A$.

[+5] Odgovor in protiprimer za b).