

Predizpit iz Algebre 1 za finančnike

19. 5. 2021

Veliko uspeha!

Ime in priimek

1	
2	
3	
4	
Σ	

Sedež (2.01)

Vpisna številka

1. naloga

Dani sta ravnina Σ z enačbo $4x - 5y - 3z = 12$ in premica p z enačbo $\frac{x-1}{4} = 1-y = 2z$.

a) Določi presek ravnine Σ in premice p .

b) Določi vse premice, ki so od ravnine Σ oddaljene za $\sqrt{2}$ in sekajo premico p pod pravim kotom.

a) $\frac{x-1}{4} = 1-y = 2z = t \Rightarrow x = 4t+1, y = 1-t, z = \frac{1}{2}t$
vstavimo v Σ : $4(4t+1) - 5(1-t) - 3(\frac{1}{2}t) = 12$
 $\frac{39}{2}t - 1 = 12$
 $t = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{11}{3}$
 $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
 $z = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Presek je točka $(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

b) Poiščimo točki na premici p , ki sta od ravnine Σ oddaljeni za $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \left| \frac{4(4t+1) - 5(1-t) - 3(\frac{1}{2}t) - 12}{\sqrt{16+25+9}} \right| = \frac{|\frac{39}{2}t - 13|}{5\sqrt{2}} \Rightarrow |\frac{39}{2}t - 13| = 10$$

i) $\frac{39}{2}t - 13 = 10 \Rightarrow t = \frac{46}{39} \Rightarrow T_1(\frac{223}{39}, -\frac{7}{39}, \frac{23}{39})$
ii) $\frac{39}{2}t - 13 = -10 \Rightarrow t = \frac{2}{13} \Rightarrow T_2(\frac{21}{13}, \frac{11}{13}, \frac{1}{13})$

Smerni vektor iskane premice je pravokoten na smerni vektor $\vec{p} = (4, -1, \frac{1}{2})$ premice p in normale $\vec{n} = (4, -5, -3)$ ravnine Σ :

$$\vec{p} \times \vec{n} = (\frac{11}{2}, 14, -16)$$

Iskani premici sta

i) $\frac{2(x - \frac{223}{39})}{11} = \frac{y + \frac{7}{39}}{14} = \frac{z - \frac{23}{39}}{-16}$
ii) $\frac{2(x + \frac{21}{13})}{11} = \frac{y - \frac{11}{13}}{14} = \frac{z - \frac{1}{13}}{-16}$

2. naloga

Naj bo

$$A_a = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 1-a & 2a-1 \\ a & a-1 & 0 & -a \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 \\ a & 0 & 1-a & a-1 \end{bmatrix} \text{ in } b_a = \begin{bmatrix} 5a-1 \\ 2 \\ 2a-2 \\ 2a \end{bmatrix}.$$

a) V odvisnosti od $a \in \mathbb{R}$ reši sistem $A_a x = b_a$.

b) Poišči vse $\alpha \in \mathbb{R}$, za katere je rešljiva enačba $A_0 X + A_2 = \alpha X$. Odgovor utemelji!

$$\begin{aligned} a) \quad & \left[\begin{array}{cccc|c} 2a & 0 & 1-a & 2a-1 & 5a-1 \\ a & a-1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 & 2a-2 \\ a & 0 & 1-a & a-1 & 2a \end{array} \right] \xrightarrow{-2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2(1-a) & 1-a & 4a-1 & 5(a-1) \\ a & a-1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 & 2(a-1) \\ 0 & 1-a & 1-a & 2a-1 & 2(a-1) \end{array} \right] \xrightarrow{-2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3(1-a) & 4a-3 & a-1 \\ a & 0 & a-1 & 1-a & 2a \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 & 2(a-1) \\ 0 & 0 & 2(1-a) & 2(a-1) & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{:2} \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & a-1 & 1-a & 2a \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 & 2(a-1) \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 3(1-a) & 4a-3 & a-1 \end{array} \right] \xrightarrow{+} \left[\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 1-a & 0 & a & 2(a-1) \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a-1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

1) $a=0$: sistem nima rešitve (zadnja vrstica)

$$2) \quad a \neq 0: \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-a & 0 & a & 2(a-1) \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a-1}{a} \end{array} \right] \xrightarrow{+1-a} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & -\frac{(a-1)^2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a-1}{a} \end{array} \right]$$

2.1) $a=1$: sistem ima doparametrično družino rešitev: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2.2) $a \neq 1$: sistem je enolično rešljiv: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{a-1}{a} \\ \frac{a-1}{a} \end{bmatrix}$

$$b) \quad (A_0 - \alpha I) X = -A_2$$

Matrika A_2 je obrnljiva (pri a) smo dokazali, da za $a=2$ ima sistem enolično rešitev, zato je tudi leva stran obrnljiva matrike. Torej je obrnljivost matrike $A_0 - \alpha I$ potreben pogoj za rešitev enačbe. In če je $A_0 - \alpha I$ obrnljiva, je $X = -(A_0 - \alpha I)^{-1} A_2$ rešitev.

Torej je enačba rešljiva $\Leftrightarrow A_0 - \alpha I$ je obrnljiva $\Leftrightarrow \alpha$ ni lastna vrednost matrike A_0

$$p_{A_0}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-1-\lambda)((-1-\lambda)^2 - 1) = \lambda(1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Enačba ima rešitev $\Leftrightarrow \alpha \notin \{0, -1, -2\}$

3. naloga

Na prostoru matrik $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ je dan skalarni produkt $\langle X, Y \rangle = \text{sled}(XY^T)$. Naj bo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Poišči pravokotno projekcijo A_4 na A_1 in pravokotno projekcijo A_3 na podprostor $U = \text{Lin}\{A_1, A_2\}$.

b) Naj bo $\mathcal{A}: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ linearna preslikava, ki ji v bazi $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ pripada matrika A . Ali je $\mathcal{A}$ normalna? Odgovor utemelji!

a) $\text{proj}_{A_1} A_4 = \frac{\langle A_1, A_4 \rangle}{\langle A_1, A_1 \rangle} A_1 = \frac{\text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix}}{\text{sled} \begin{bmatrix} 2 & * \\ * & 2 \end{bmatrix}} A_1 = 0$
 (sčelmo $B = \alpha A_1 + \beta A_2$, da je $A_3 - B \perp A_1$ in $A_3 - B \perp A_2$)
 $\langle A_3 - \alpha A_1 - \beta A_2, A_1 \rangle = \langle A_3, A_1 \rangle - \alpha \langle A_1, A_1 \rangle - \beta \langle A_2, A_1 \rangle = \text{sled} A_3 A_1^T - \alpha \text{sled} A_1 A_1^T - \beta \text{sled} A_2 A_1^T$
 $= \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 2 \end{bmatrix} - \alpha \text{sled} \begin{bmatrix} 2 & * \\ * & 2 \end{bmatrix} - \beta \text{sled} \begin{bmatrix} 2 & * \\ * & 2 \end{bmatrix} = 2 - 4\alpha \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{1}{2}}$
 $\langle A_3 - \alpha A_1 - \beta A_2, A_2 \rangle = \langle A_3, A_2 \rangle - \alpha \langle A_1, A_2 \rangle - \beta \langle A_2, A_2 \rangle = \text{sled} A_3 A_2^T - \alpha \cdot 0 - \beta \text{sled} A_2 A_2^T$
 $= \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 2 \end{bmatrix} - \beta \text{sled} \begin{bmatrix} 2 & * \\ * & 2 \end{bmatrix} = 2 - 4\beta \Rightarrow \underline{\beta = \frac{1}{2}}$

Projekcija A_3 na U je $\text{proj}_U A_3 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) A je normalna $\Leftrightarrow$ obstaja ortogonalna baza za $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ iz lastnih vektorjev preslikave $\mathcal{A}$:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4^2 = (\lambda-2)^2 - 4^2 = (\lambda-2-4)(\lambda-2+4) = (\lambda-6)(\lambda+2)$$

$$\lambda_1 = -2: A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x=1, y=-1, z=w=0 \Rightarrow V_1 = A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6: A - 6I = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 & -1 \\ -4 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x=1, y=-1, z=w=0 \Rightarrow V_2 = A_1 - A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4: A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} w=2 \\ x=-1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{matrix} \Rightarrow V_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = 0: A - 0I \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} w=2 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=-2 \end{matrix} \Rightarrow V_4 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \langle V_1, V_3 \rangle = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \langle V_1, V_4 \rangle = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\langle V_2, V_3 \rangle = \text{sled} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \langle V_2, V_4 \rangle = \text{sled} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \text{sled} \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \langle V_3, V_4 \rangle = \text{sled} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \text{sled} \begin{bmatrix} -8 & * \\ * & 8 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ je ortogonalna baza iz lastnih vektorjev $\Rightarrow A$ je normalna

Nalogo b) lahko rešimo tudi tako, da A zapišemo v ON bazi.

Pri računanju $\text{proj}_U A_3$ smo opazili, da sta $B_1 = \frac{1}{2}A_1$ in $B_2 = \frac{1}{2}A_2$ dolžine ena in $B_1 \perp B_2$. Poleg tega je

$B_3 = A_3 - \text{proj}_U A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pravokoten na B_1 in B_2 . Ker je $\|B_3\|=1$ in je $B_4 = A_4$ tudi dolžine 1 in pravokoten

na $\text{proj}_U A_3$, je $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ ON baza. Ker je $A_1 = 2B_1, A_2 = 2B_2, A_3 = B_3 + B_1 + B_2, A_4 = B_4$ sta prehodni matriki

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Ker je } A_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}^{-1} A P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ sli} \text{ adjungirana, je zato normalna.}$$

4. naloga

a) Za linearno preslikavo $A: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ velja $\dim \ker(A - 2I)^3 = 5$ in $\dim \ker(A - 2I) = 2$. Poišči vse možne jordske forme $J(A)$.

b) Za linearno preslikavo $B: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ velja $\dim \ker(B + 2I) = 2$ in njen minimalni polinom je $m_B(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$. Poišči vse možne jordske forme $J(B)$.

c) Linearna preslikava $C: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$, ki ni injektivna, ima le dve lastni vrednosti. Poleg tega velja $\text{rang}(C + I)^4 = \text{rang}(C + I)^3 = 1$ in $\dim \ker(C + I) = 3$. Poišči vse možne jordske forme $J(C)$.

Vse odgovore dobro utemelji!

a) $\dim \ker(A - 2I)^3 = 5 \Rightarrow \lambda = 2$ je edina lastna vrednost za A in največje kletke (za $\lambda = 2$) je velikosti 3x3 ali manj.
 $\dim \ker(A - 2I) = 2 \Rightarrow J(A)$ ima natanko dve kletki

$\Rightarrow J(A)$ ima eno 3x3 in eno 2x2 kletko

$$\Rightarrow J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \text{ je edina možnost}$$

b) $m_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$

B ima natanko dve lastni vrednosti: $\lambda_1 = 1$ ima največjo kletko velikosti 2x2

$\lambda_2 = -2$ ima največjo kletko velikosti 1x1

$\dim \ker(B + 2I) = 2 \Rightarrow J(B)$ ima natanko dve kletki za $\lambda_2 = -2$ in obe sta velikosti 1x1.

Tako ima eno 2x2 in eno 1x1 kletko za $\lambda_1 = 1$

$$\Rightarrow J(B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & -2 & \\ & & & & -2 \end{bmatrix} \text{ je edina možnost}$$

c) $\ker C$ ni injektivna, je ena lastna vrednost $\lambda_1 = 0$.

$\dim \ker(C + I) = \underline{3} \Rightarrow$ druga lastna vrednost je $\lambda_2 = -1$ in $J(C)$ ima 3 kletke za $\lambda_2 = -1$.

$\text{rang}(C + I)^4 = \text{rang}(C + I)^3 = \underline{1} \Rightarrow$ vsota velikosti vseh (tseh) kletk za $\lambda_2 = -1$ je 8 $= 9 - 1$
 $\text{dim } \mathbb{R}^9$

Ker se rangi za $(C + I)^n$ stabilizirajo pri $n=3$ (ali prej) je največja kletka za $\lambda_2 = -1$ velika največ 3x3.

$\Rightarrow$ kletke za $\lambda_2 = -1$ so tako velike 3x3, 3x3 in 2x2 ($3+3+2=8$)

Vsota velikosti vseh kletk je 9 ($= \dim \mathbb{R}^9$), zato obstaja le ena kletka za $\lambda_1 = 0$ in to velikosti 1x1

$$J(C) = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \text{ je edina možnost}$$