1	
2	
3	
4	
Σ	

Algebra: 1. izpit

14. 6. 2021

Čas pisanja je 105 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

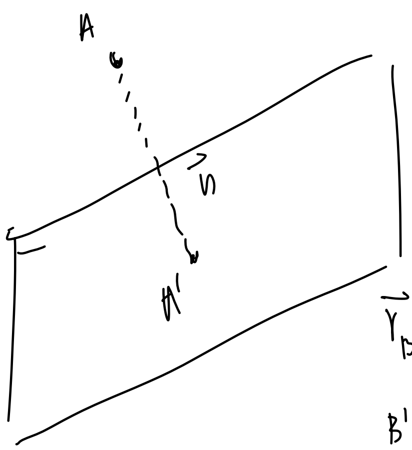
Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga

V prostoru sta dani točki $A(1,2,1)$ in $B(2,-1,2)$ ter ravnina Σ, dana z enačbo $x+y-z=1$. Naj bosta A' in B' zaporedoma pravokotni projekciji točk A in B na Σ. Določi množico vseh točk C na Σ, da ima trikotnik $\Delta A'B'C$ ploščino $\sqrt{2}$.

Določimo A' in B':



$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + \lambda \vec{n} = (1,2,1) + \lambda(1,1,-1) = (1+\lambda, 2+\lambda, 1-\lambda)$$

$$A' \in \Sigma \iff (1+\lambda) + (2+\lambda) - (1-\lambda) = 1$$

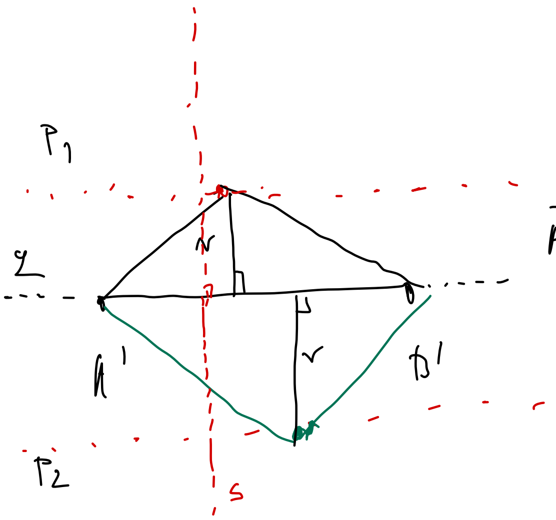
$$\iff \lambda = -1/3$$

$$\implies r_{A'} = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{4}{3}\right)$$ 4

$$\vec{r}_{B'} = \vec{r}_B + \mu \vec{n} = (2,-1,2) + \mu(1,1,-1) = (2+\mu, -1+\mu, 2-\mu)$$

$$B' \in \Sigma \iff (2+\mu) + (-1+\mu) - (2-\mu) = 1$$

$$\iff \mu = 2/3 \implies \vec{r}_{B'} = \left(\tfrac{8}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right)$$ 4



$$\overrightarrow{A'B'} = (2,-2,0) \qquad \|\overrightarrow{A'B'}\| = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = P = \frac{2\sqrt{2}\cdot v}{2} \implies v = 1$$ 4

Iščemo premici p_1, p_2 vzporedni p in od p oddaljeni za 1. 5

$$\vec{s} = (1,-1,0) \times (1,1,-1) = (1,1,2).$$ 4

Iskani premici sta p_1: $\vec{r}_{A'} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \vec{s} + t \cdot \overrightarrow{A'B'}$ 2

$\vec{r}_{A'} - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{s} + t \cdot \overrightarrow{A'B'}$ 2

2. naloga

Za $n \in \mathbb{N}$ je dana matrika A_n velikosti $2n \times 2n$ na naslednji način. Za $k = 1, \ldots, n$ je

$$\begin{aligned} a_{k,k} &= n+1-k \\ a_{n+k,n+k} &= k \\ a_{2n+1-k,k} &= n-k \\ a_{n+1-k,n+k} &= k-1 \end{aligned}$$

in $a_{ij} = 0$ sicer.

a) Zapiši matriki A_2 in A_3.

b) Izračunaj $\det A_n$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad 3$$

$$\det A_n = \begin{vmatrix} n & & & & & & & & & n-1 \\ & n-1 & & & & & & & n-2 & \\ & & \ddots & & & & & \iddots & & \\ & & & 2 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & 2 & & & \\ & & \iddots & & & & & \ddots & & \\ & n-2 & & & & & & & n-2 & \\ n-1 & & & & & & & & & n \end{vmatrix}$$

3

2. naloga

Za $n \in \mathbb{N}$ je dana matrika A_n velikosti $2n \times 2n$ na naslednji način. Za $k = 1, \dots, n$ je

$$\begin{aligned} a_{k,k} &= n+1-k \\ a_{n+k,n+k} &= k \\ a_{2n+1-k,k} &= n-k \\ a_{n+1-k,n+k} &= k-1 \end{aligned}$$

in $a_{ij} = 0$ sicer.

a) Zapiši matriki A_2 in A_3.

b) Izračunaj $\det A_n$.

razvoj po 1. vrstici

4+3

razvoj in še en razvoj

$$\det A_n = + n \cdot n \cdot \det A_{n-1} - (n-1)(n-1) \det A_{n-1}$$

$$= (n^2 - (n-1)^2) \det A_{n-1} = (2n-1) \det A_{n-1}.$$

2

$$\Rightarrow \quad \det A_n = (2n-1)(2n-3) \det A_{n-2} = \dots$$

$$= (2n-1)!! \det A_1 = (2n-1)!! \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2n-1)!!$$

5

3

3. naloga

Za linearno preslikavo $A:\mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$, ki ima eno samo lastno vrednost, velja $\dim\ker(A-I)=4$, $\dim\ker(A-I)^4=7$ in $\dim\ker(A-I)^5=8$.

a) Določi vse možne Jordanove forme $J(A)$.

b) Če je $\dim\ker(A-I)^7=10$, izračunaj $\ln J(A)$.

a) Edina lastna vrednost je $\lambda=1$.

$\dim\ker(A-I)=4 \Rightarrow$ imamo 4 kletke. 2

$\dim\ker(A-I)^5-\dim\ker(A-I)^4=1 \rightarrow$ imamo 1 kletko velikosti vsaj 5×5. 3

- Če je to kletka 5×5 2+2

$$\begin{bmatrix}
1&1&&&&&&&&\\
&1&1&&&&&&&\\
&&1&1&&&&&&\\
&&&1&1&&&&&\\
&&&&1&&&&&\\
&&&&&1&1&&&\\
&&&&&&1&1&&\\
&&&&&&&1&&\\
&&&&&&&&1&\\
&&&&&&&&&1
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
1&1&&&&&&&&\\
&1&1&&&&&&&\\
&&1&1&&&&&&\\
&&&1&1&&&&&\\
&&&&1&&&&&\\
&&&&&1&1&&&\\
&&&&&&1&&&\\
&&&&&&&1&1&\\
&&&&&&&&1&\\
&&&&&&&&&1
\end{bmatrix}$$

Primer 5×5 odpade, saj je $(A-I)^5=0 \Rightarrow \dim\ker(A-I)^5=10$.

Pravtako drugi primer.

2

Če je to kletka 6×6

$$\begin{bmatrix}
1&1&&&&&&&&\\
&1&1&&&&&&&\\
&&1&1&&&&&&\\
&&&1&1&&&&&\\
&&&&1&1&&&&\\
&&&&&1&&&&\\
&&&&&&1&1&&\\
&&&&&&&1&&\\
&&&&&&&&1&\\
&&&&&&&&&1
\end{bmatrix}$$

2

Če je to kletka 7×7 2

$$\begin{bmatrix}
1&1&&&&&&&&\\
&1&1&&&&&&&\\
&&1&1&&&&&&\\
&&&1&1&&&&&\\
&&&&1&1&&&&\\
&&&&&1&1&&&\\
&&&&&&1&&&\\
&&&&&&&1&&\\
&&&&&&&&1&\\
&&&&&&&&&1
\end{bmatrix}$$

2

V prvem primeru je $\dim\ker(A-I)^5=9$.

Tudi odpade.

Edino 7×7 primer je možen.

Velikost 8×8 ali več ni možno zaradi števila kletk.

1

3. naloga

Za linearno preslikavo $A\colon \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$, ki ima eno samo lastno vrednost, velja $\dim\ker(A-I) = 4$, $\dim\ker(A-I)^4 = 7$ in $\dim\ker(A-I)^5 = 8$.

a) Določi vse možne Jordanove forme $J(A)$.

b) Če je $\dim\ker(A-I)^7 = 10$, izračunaj $\ln J(A)$.

2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$f(x) = \ln x$, $f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$, $f^{(5)}(x) = 24x^{-5}$, $f^{(6)}(x) = -120x^{-6}$

$$\ln J(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & & & \\ & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & & & \\ & & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & & & \\ & & & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \\ & & & & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Določitev Jordanove (neodv. od a)

- 4 kletke 2
- največja kletka 7x7 2
- J(A) 2

2 3

vrednosti odvodov

4. naloga

Za normalno 3×3 matriko A z $\det A = 2$ in realnim karakterističnim polinomom velja $A^*(1,-1,0) = (-i, i, 0)$. Lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti največji lastni vrednosti, leži na ravnini $x + y + z = 0$. Določi matriko A.

3 3

$A^*(1,-1,0) = -i\,(1,-1,0) \implies A(1,-1,0) = i(1,-1,0)$ (normalnost A).

$\implies \lambda_1 = i \implies \lambda_2 = -i$ zaradi realnega karakt. polinoma. 3

$\implies 2 = \det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -i^2\lambda_3 = \lambda_3 \implies \underline{\underline{\lambda_3 = 2}}$ 3

Naj bosta v_2 in v_3 lastna vektorja za λ_2 in λ_3.

Vektorji $(1,-1,0), v_2, v_3$ so pravokotni. Ker v_3 leži na ravnini $x+y+z=0$, je $v_3 \perp (1,1,1)$. Zato je $v_3 = (1,1,1) \times (1,-1,0) = (1,1,-2)$. 3

zaradi pravokotnosti je $v_2 = (1,1,1)$ 3

$$D = \begin{bmatrix} i & & \\ & -i & \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad 1 \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt6} \end{bmatrix} \quad 2 \qquad P^{-1} = P^T \quad 2$$

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2+i & 2-5i & -4-2i \\ 2-5i & 2+i & -4-2i \\ -4-2i & -4-2i & 8-2i \end{bmatrix} \quad 2$$