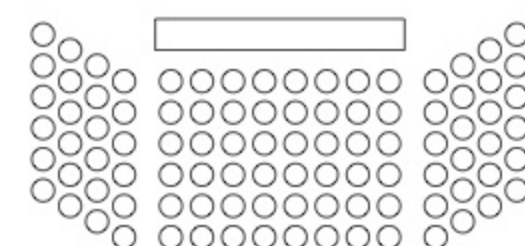


2. izpit iz Algebre 1 za finančnike

19. 8. 2021

Veliko uspeha!



Sedež (2.01)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

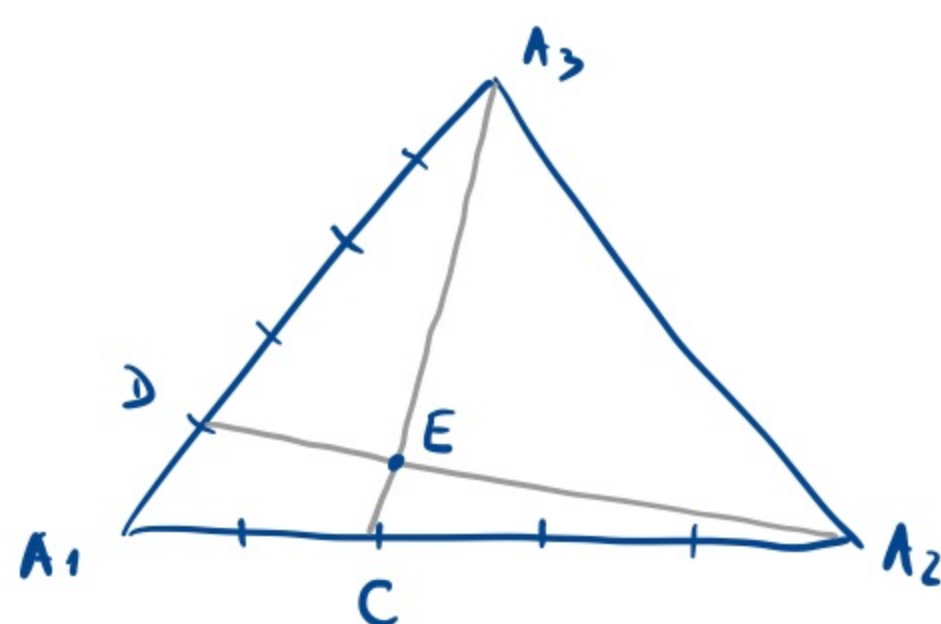
1. naloga

V tristrani piramidi $A_1A_2A_3B$ točka C deli rob A_1A_2 v razmerju $A_1C : CA_2 = 2 : 3$, točka D pa deli rob A_1A_3 v razmerju $A_1D : DA_3 = 1 : 4$. Naj bo točka E presečišče daljic A_2D in A_3C . Za vsak $i = 1, 2, 3$, točka B_i deli rob A_iB v razmerju $A_iB_i : B_iB = i : 1$.

a) V kakšnem razmerju točka E deli daljico A_2D ?

b) V kakšnem razmerju trikotnik $B_1B_2B_3$ deli daljico BE ?

a)



$$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_2E} = \alpha \overrightarrow{A_2D} = \alpha (-\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}) = -\alpha\vec{a} + \frac{\alpha}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{A_2E} = \overrightarrow{A_2C} + \beta \overrightarrow{CA_3} = -\frac{3}{5}\vec{a} + \beta(-\frac{2}{5}\vec{a} + \vec{b}) = (-\frac{3}{5} - \frac{2\beta}{5})\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Iz enačimo obe izražavi za $\overrightarrow{A_2E}$: $-\alpha\vec{a} + \frac{\alpha}{5}\vec{b} = (-\frac{3}{5} - \frac{2\beta}{5})\vec{a} + \beta\vec{b}$

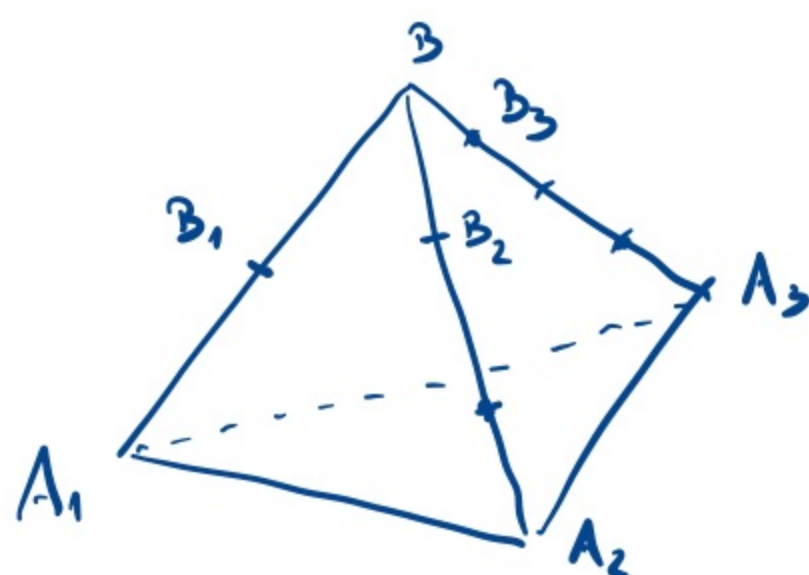
$$-\alpha = -\frac{3}{5} - \frac{2\beta}{5} \quad \text{in} \quad \frac{\alpha}{5} = \beta$$

$$-\alpha = -\frac{3}{5} - \frac{2\alpha}{25}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{23}{25}\alpha$$

$$\alpha = \frac{15}{23} \Rightarrow \underline{\underline{A_2E : ED = 15 : 8}}$$

b)



$$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{A_1B}$$

Iz a) sledi $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA_2} + \frac{15}{23} \overrightarrow{A_2E} = -\vec{c} + \vec{a} + \frac{15}{23}(-\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}) = \frac{8}{23}\vec{a} + \frac{3}{23}\vec{b} - \vec{c}$

Izračunajmo $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BB_2} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{3}(-\vec{c} + \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c}$ in

$$\overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BB_3} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}(-\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

Naj bo X preseček daljice BE in trikotnika $B_1B_2B_3$:

$$\overrightarrow{BX} = x \overrightarrow{BE} = \frac{8x}{23}\vec{a} + \frac{3x}{23}\vec{b} - x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BB_1} + y \overrightarrow{B_1B_2} + z \overrightarrow{B_1B_3} = -\frac{1}{2}\vec{c} + y(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c}) + z(\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c})$$

Iz enačimo obe izražavi za $\overrightarrow{BX}$ in primerjamo koeficiente pri (linearno neodvisnih) vektorjih $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. (Računamo le neznanke x , saj nam le ta da želeno razmerje.)

$$\vec{a}: \frac{8x}{23} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{24x}{23}$$

$$\vec{b}: \frac{3x}{23} = \frac{z}{4} \Rightarrow z = \frac{12x}{23}$$

$$\vec{c}: -x = -\frac{1}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{4x}{23} - \frac{3x}{23}$$

$$\frac{30x}{23} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{23}{60} \Rightarrow \underline{\underline{BX : XE = 23 : 37}}$$

2. naloga

Naj bo $v_1 = (3, 1, 0, 0)^T$, $v_2 = (-2, -1, 0, 0)^T$, $v_3 = (-1, 1, 2, 1)^T$ in $v_4 = (0, 1, 7, 4)^T$. Linearna preslikava $A_t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dana s predpisom $A_t(v_1) = (1, 0, -1)^T$, $A_t(v_2) = (-2, t, 0)^T$, $A_t(v_3) = (-1, -1, t)^T$ in $A_t(v_4) = (-3, 0, 3)^T$. Linearni preslikavi $B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ pa v bazi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ pripada zgornje trikotna matrika, ki ima na in nad diagonalo vse elemente enake 7.

- Določi vse $t \in \mathbb{R}$, da bo A_t surjektivna.
- Določi kaki bazi za $\ker A_0$ in $\ker A_2$.
- Določi matriko za $A_0 \circ B$ v standarnih bazah.

a) Ogradije slike preslikave A_t je $\{A_t v_1, A_t v_2, A_t v_3, A_t v_4\}$. Dobivimo kakvo bazo za $\text{im } A_t$ (u zavisnosti od t):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & t & 0 \\ -1 & -1 & t \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2) \rightarrow 1+2 \\ 3) \rightarrow 1+3 \\ 4) \rightarrow 1+3}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & -2 \\ 0 & -1 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t^2-t-2 \\ 0 & -1 & t-1 \end{bmatrix}$$

Preslikava A_4 je surjektivna, če je rang zadnje matrike (in potem tudi rang prvih dveh) maksimalen.

Dobivamo pogoj, da je A_t surjektivna natanko tedaj, ko je $t^2 - t - 2 \neq 0$.

Odg: A_t je surjektivna $\Leftrightarrow t \neq -1, 2$

(Opomba: Če $t = -1, 2$, je bazis za A_t npr. $\{[1, 0, -1]^T, [0, -1, t+1]^T\}$.)

b) Če je $t=0$, je A_0 surjektivna, zato je $\dim \ker A_0 = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{im} A_0 = 4 - 3 = 1$.

Vidimo, da je $A_0(3u_1 + u_4) = 3A_0(u_1) + A_0(u_4) = 0$, zato je baza za $\ker A_0$ kar $B_{\ker A_0} = \{3u_1 + u_4\} = \{[9, 4, 7, 4]^T\}$.

Če je $t=2$, je po izračunu v a) $\dim \operatorname{im} A_2 = 2$, zato je $\dim \ker A_2 = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{im} A_2 = 4 - 2 = 2$.

Kot v primeru $t=0$, je $3N_1 + N_4 \in \ker A_2$. Poleg tega pa velja

$$A_2(4u_1 + u_2 + 2u_3) = 4A_2(u_1) + A_2(u_2) + 2A_2(u_3) = 4[1, 0, -1]^T + [-2, 2, 0]^T + 2[-1, 1, 2]^T = 0$$

$$\Rightarrow B_{B_1, A_2} = \{3u_1 + u_4, 4u_1 + u_2 + 2u_3\} = \{[9, 4, 7, 4]^T, [5, 4, 4, 2]^T\}$$

(Opomba: Drugi bazni vektor lahko preberemo iz računa pri a). V prvem bazu smo drugi vektor pristali 2kratnik prve vektorja in v drugem bazu smo drugi vektor pristali 2kratnik vektorja, ki predstavlja vsoto prve in tretje vektorje prvotne matrike. Ker smo dobili drugo vektor ničelo, je tako $(v_2 + 2v_1) + 2(v_1 + v_3) = 4v_1 + v_2 + 2v_3$.)

c) Matrica za B u bazi B je $B_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrizen $z = A_{ij}$ bilden $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}^n$ je $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Tako je matrika za A_0B u standardni bazi $A_0B_{22} = A_{033} B_{22} P_{23}$, gdje je $P_{23} = P_{32}^T$ preobrazni matrika.

$$P_{yB} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad P_{2y}: \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 4 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 13 & -22 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \Rightarrow P_{2y} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 & -17 \\ 1 & -3 & 13 & -22 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_0 B_{yy} = 7 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 & -17 \\ 1 & -3 & 13 & -22 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 & -17 \\ 1 & -3 & 13 & -22 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & -29 & 50 \end{bmatrix}$$

3. naloga

Na prostoru realnih polinomov $\mathbb{R}_2[x]$ stopnje največ 2 je dan skalarni produkt

$$\langle a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle = a_2b_2 + 3a_1b_1 + a_0b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 - a_1b_0 - a_0b_1.$$

Naj linearni preslikavi $A: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ v bazi $\mathcal{S} = \{x^2, x, 1\}$ pripada matrika

$$A_{\mathcal{S}\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Ali je preslikava A normalna glede na skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

b) Naj bo $p(x) = x^2 + 1$. Določi $A^*(p)$.

a) Določimo lastne vrednosti in vektorje za A :

$$p_A(\lambda) = \det(A_{\mathcal{S}\mathcal{S}} - \lambda I) = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 3^2) = (3-\lambda)(1-\lambda-3)(1-\lambda+3) = (3-\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda)$$

$$\lambda = -2: A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{lastni vektor za } \lambda_1 = -2 \text{ je } v_1 = [1, 0, -1]^T \text{ kar predstavlja polinom } p_1(x) = x^2 - 1$$

$$\lambda = 3: A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = [1, -1, -1]^T \text{ oziroma } p_2(x) = x^2 - x - 1$$

$$\lambda = 4: A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = [1, 0, 1]^T \text{ oziroma } p_3(x) = x^2 + 1$$

$$\langle p_1, p_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow p_1 \perp p_2$$

$$\langle p_1, p_3 \rangle = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0 \Rightarrow p_1 \perp p_3$$

$$\langle p_2, p_3 \rangle = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 0 \Rightarrow p_2 \perp p_3$$

Ker so lastni vektorji preslikave A medseboj pravokotni, je A normalna.

b) Ker je A normalna in je p lastni vektor za A je $A^*p = \overline{\lambda}p = 4p$. Torej $A^*p(x) = 4x^2 + 4$.

Lahko pa seveda nalogo rešimo po definiciji adjungirane preslikave (daljša pot):

$$\text{Naj bo } A^*p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\langle Ax^2, p(x) \rangle = \langle x^2 + 3, x^2 + 1 \rangle = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$\langle Ax, p(x) \rangle = \langle -5x^2 + 3x + 5, x^2 + 1 \rangle = (-5) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$\langle A1, p(x) \rangle = \langle 3x^2 + 1, x^2 + 1 \rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$$

$$\langle x^2, A^*p(x) \rangle = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b$$

$$\langle x, A^*p(x) \rangle = 3 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot a - 1 \cdot c = a + 3b - c$$

$$\langle 1, A^*p(x) \rangle = 1 \cdot c - 1 \cdot b = -b + c$$

Dobili smo sistem treh enačb s tremi neznanimi:

$$\begin{cases} a+b=4 \Rightarrow a=4-b \\ a+3b-c=0 \\ -b+c=4 \Rightarrow c=b+4 \end{cases} \Rightarrow (4-b)+3b-(b+4)=0$$

$$b=0 \Rightarrow a=4, c=4$$

$$\underline{\underline{(A^*p)(x) = 4x^2 + 4}}$$

4. naloga

a) Za linearno preslikavo $A: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ velja $\text{rang } A = 5$, $\dim \ker A^5 = 5$ in $\dim \ker(A + I) = 1$. Poišči vse možne jordske forme $J(A)$.

b) Minimalni polinom linearne preslikave B je $m_B(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2)^3$, karakteristični pa $p_B(\lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^5 - 15\lambda^4 + 40\lambda^3 + 40\lambda^2 - 192\lambda + 144$. Poišči vse možne jordske forme $J(B)$.

c) Minimalni polinom linearne preslikave $C: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$ je $m_C(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^4$ in naj velja $\dim \ker(C - I) = \dim \ker(C + I)$. Poišči vse možne jordske forme $J(C)$.

Vse odgovore dobro utemelji!

a) $\lambda_1 = 0$ je lastna vrednost in dimenzija pripadajočega lastnega podprostora je vsaj 5 ($\dim \ker A^5 = 5$).
 $\lambda_2 = -1$ je lastna vrednost.
 Ker je vsota dimenzij vseh lastnih podprostorov 6 (A stika iz prostora $\mathbb{R}^6$), sta 0 in -1 edini lastni vrednosti, dimenzija lastnega podprostora za $\lambda_1 = 0$ je 5 in za $\lambda_2 = -1$ je 1.
 Torej, obstaja le ena kletka za $\lambda_2 = -1$ in ta je velikosti 1×1 .
 Ker je $\text{rang}(A - 0I) = 5$, obstaja $6 - 5 = 1$ kletka za $\lambda_1 = 0$.
 Tako imamo za $J(A)$ le eno možnost in sicer $J(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$.

b) Iz minimalnega polinoma vidimo, da ima B le dve lastni vrednosti $\lambda_1 = -3$ in $\lambda_2 = 2$. Velikost največje kletke za $\lambda_1 = -3$ je 1×1 , za $\lambda_2 = 2$ pa 3×3 .
 Torej je karakteristični polinom oblike $p_B(\lambda) = (\lambda + 3)^\alpha (\lambda - 2)^\beta$, kjer je $\alpha \geq 1, \beta \geq 3$ in $\alpha + \beta = 6$.
 Če primerjamo konstantni člen polinoma p_B , dobimo $144 = 3^\alpha (-2)^\beta$ in zato je $\alpha = 2$ in $\beta = 4$.
 Tako imamo za $J(B)$ le eno možnost in sicer $J(B) = \begin{bmatrix} -3 & & & & \\ & -3 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$.

c) Iz minimalnega polinoma vidimo, da ima C le dve lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 1$. Velikost največje kletke za $\lambda_1 = -1$ je 2×2 in za $\lambda_2 = 1$ je 4×4 .
 Ker je $\dim \ker(C - I) = \dim \ker(C + I)$, je število kletk za $\lambda_1 = -1$ enako številu kletk za $\lambda_2 = 1$. (To pomeni, da je število lastnih vrednosti za $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 1$ enako.)
 Število kletk za vsoto lastnih vrednosti je vsaj dva, sicer bi bila velikost matrike C enaka $2 + 4 = 6$ (vsota velikosti obeh (največjih in kvadrati enakovrednih) kletk).
 Število kletk za vsoto lastnih vrednosti je največ dva, sicer bi bila velikost matrike C vsaj $(2 + 1 + 1) + (4 + 1 + 1) = 10 > 9$.
 Tako imamo dve možnosti za $J(C)$:

$$J(C) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad J(C) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$