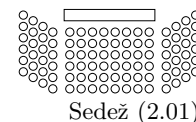


## 2. kolokvij iz Algebre 1 za finančnike

17. 12. 2019

Veliko uspeha!

Ime in priimek



|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

|          |  |
|----------|--|
| 1        |  |
| 2        |  |
| 3        |  |
| 4        |  |
| $\Sigma$ |  |

### 1. naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadraterk čitljivo označi, če je trditev pravilna **P** oziroma napačna **N**.

Če ne veš, pusti kvadraterk prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- P** Obstaja obrnljiva  $2019 \times 2019$  matrika, ki ima determinanto enako 2020.  
*Npr. diagonalne matrike z enim diagonalnim elementom 2020, ostali pa 1.*
- N** Sistem linearnih enačb  $Ax = b$  ima lahko natanko tri rešitve.  
*Lahko nima rešitve, ima natanko eno ali pa neskončno.*
- P** Če je rang matrike homogenega sistema linearnih enačb strogo manjši od števila neznank, ima ta sistem netrivialne rešitve.
- N** Če je neprazna podmnožica  $N$  danega monoida  $(M, \circ)$  zaprta za operacijo, je  $N$  podmonoid v  $M$ .  
*Npr.  $\{2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$  je zaprt za operacijo  $+$ , a nima enote.*
- N** Množica vseh realnih  $2019 \times 2019$  matrik z determinanto enako 2020 je podgrupa grupe  $GL_{2019}(\mathbb{R})$ .  
*V množici ni enote. Tudi ni zaprt za množenje ne za invertiranje.*
- P** Naj bo  $(G, \circ)$  grupa s končno mnogo elementi in  $f : G \rightarrow G$  epimorfizem grup. Potem je  $f$  tudi izomorfizem.  
*Vsaka surjektivna preslikava iz končne množice vase je bijekcija.*
- N** Vsak podkolobar obsega je tudi obseg.  
*Npr.  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  je podkolobar, ki ni obseg.*
- N** Obstaja vektorski prostor dimenzije 2020, ki ne vsebuje podprostora dimenzije 2019.  
*Če je  $\{v_1, \dots, v_{2019}\}$  baza za  $V$ , ki je dimenzije 2020, je  $\dim \mathbb{Z} \langle v_1, \dots, v_{2019} \rangle = 2019$ .*
- P** Če je  $V$  netrivialen vektorski prostor nad obsegom  $\mathbb{Z}_p$ , potem ima  $V$  netrivialen podprostor, ki vsebuje le končno mnogo vektorjev.  
*Za  $v \in V \setminus \{0\}$ , velja  $\mathbb{Z} \langle v \rangle < V$  ima natanko  $p$  elementov.*
- P** Če so  $v_1, v_2, \dots, v_{2019}$  linearno neodvisni vektorji v  $\mathbb{R}^{2019}$ , potem tvorijo bazo tega prostora.

## 2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A_t = \begin{bmatrix} t & t-t^2 & t \\ t & 1-t^2 & -t^2 \\ 1 & 1-t & -t \\ 2 & 1-2t & -t \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b_t = \begin{bmatrix} 2t-1 \\ 3t-1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

1. V odvisnosti od  $t \in \mathbb{R}$  reši sistem enačb  $A_t x = b_t$ .

2. Reši matrično enačbo  $A_1^T A_1 X = 2X + I$ , kjer je  $I$  identična matrika.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1-t & -t & 3 \\ 2 & 1-2t & -t & 5 \\ t & t-t^2 & t & 2t-1 \\ t & 1-t^2 & -t & 3t-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1-t & -t & 3 \\ 0 & -1 & t & -1 \\ 0 & 0 & t^2+t & -t-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t & 4 \\ 0 & 1 & -t & 1 \\ 0 & 0 & t^2+t & -t-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t & 4 \\ 0 & 1 & -t & 1 \\ 0 & 0 & t^2+t & -t-1 \\ 0 & 0 & t-t^2 & t-2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t & 4 \\ 0 & 1 & -t & 1 \\ 0 & 0 & t & -3/2 \\ 0 & 0 & t-t^2 & t-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & t & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 + 1/t \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Če  $t \neq -1$ , sistem nima rešitve.

Če  $t = -1$ , ima sistem nekonečno rešitev  $x = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$ .

$$\textcircled{2} \quad A_1^T A_1 X = 2X + I$$

$$(A_1^T A_1 - 2I)X = I$$

$$A_1^T A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1^T A_1 - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A_1^T A_1 - 2I)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X = (A_1^T A_1 - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

### 3. naloga (20 točk)

Naj bo  $B$  matrika velikosti  $n \times n$ , v kateri so vsi diagonalni elementi enaki 1, vsi ostali elementi pa so enaki  $a$ . Za vsak  $a \in \mathbb{R}$  izračunaj determinanto  $\det B$ . Za katere  $a \in \mathbb{R}$  je matrika  $B$  obrnljiva?

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a & 1 & a & \dots & a \\ a & a & 1 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - aR_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 - aR_1 \\ \vdots \\ R_n \rightarrow R_n - aR_1}} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a+1+a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a-1 & 0 & 1+a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a & 0 & 0 & \dots & 1+a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + aR_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + aR_1 \\ \vdots \\ R_n \rightarrow R_n + aR_1}} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 1+a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a \end{vmatrix} = \underline{\underline{(1+(n-1)a)(1+a)^{n-1}}}$$

Matrika  $B$  je obrnljiva  $\Leftrightarrow \det B \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a \neq 1, \frac{1}{1-n}}}$

#### 4. naloga (25 točk)

Za  $x, y \in \mathbb{R}$  naj bo  $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ .

1. Ali je  $([0, \infty), *)$  monoid? Ali je  $([0, \infty), *)$  grupa?
2. Pokaži, da  $(\mathbb{R}, *)$  ni grupa.
3. Ali je  $((-1, 1), *)$  grupa?
4. Naj bosta  $f, g: ((-1, 1), *) \rightarrow ((-1, 1), *)$  podani s predpisoma  $f(x) = -x$  in  $g(x) = x^2$ . Ali je katera od preslikav  $f$  in  $g$  homomorfizem?

① operacija  $*$  je asociativna:  $(x * y) * z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x+y+z/(1+xy)}{1+xy+(x+y)z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$   
 $x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1+yz) + y + z}{1+yz+x(y+z)} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$   $\Rightarrow$

operacija  $*$  je komutativna:  $x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x$

število 0 je enota:  $x * 0 = \frac{x+0}{1+0} = x$  ( $0 * x = x$  sledi iz komutativnosti operacije  $*$ )

če  $x, y \in [0, \infty)$ , je  $x * y \in [0, \infty)$

$\Rightarrow ([0, \infty), *)$  je monoid.

Naj bo  $x \in [0, \infty)$ . iščemo inverz:  $0 = x * x^{-1} = \frac{x+x^{-1}}{1+xx^{-1}} \Rightarrow x^{-1} = -x$

Če  $x > 0$ ,  $x^{-1} = -x \notin [0, \infty)$ . Torej  $([0, \infty), *)$  ni grupa

②  $(\mathbb{R}, *)$  ni grupa, saj  $1 * (-1) \notin \mathbb{R}$

③  $x, y \in (-1, 1) \Rightarrow -1 < x * y < 1$

$-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$  /  $1+xy$  (lahko množimo, saj je  $1+xy > 0$ )

$-1-x < x+y < 1+xy$

a)  $-1-x < x+y$

$0 < x+y+x+y+1$

$0 < (x+y)(y+1)$  ✓

b)  $x+y < 1+xy$

$0 < x+y-x-y+1$

$0 < (x-1)(y-1)$  ✓

$x \in (-1, 1) \Rightarrow$  inverz elementa  $x$  je  $-x$ , saj  $x * (-x) = \frac{x+(-x)}{1+x(-x)} = 0$  in  $-x \in (-1, 1)$ .

$\Rightarrow (-1, 1, *)$  je (komutativna) grupa

④  $x \in (-1, 1) \Rightarrow f(x) = -x \in (-1, 1)$

$f(x * y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = -\frac{x+y}{1+xy} = \frac{(-x)+(-y)}{1+(-x)(-y)} = f(x) * f(y)$

$\Rightarrow f$  je homomorfizem

$x \in (-1, 1) \Rightarrow g(x) = x^2 \in (-1, 1)$

$g(x * y) = g\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2$

$g(x) * g(y) = x^2 * y^2 = \frac{x^2+y^2}{1+x^2y^2}$

$\Rightarrow g(x * y) \neq g(x) * g(y)$ , saj npr.  $g\left(\frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g(0) = 0$  toda  $g\left(\frac{1}{2}\right) * g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1/4+1/4}{1+1/16} \neq 0$

$\Rightarrow g$  ni homomorfizem

## 5. naloga (20 točk)

Naj bo  $U = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(0) = p(1), p(2) = p(-2)\}$ ,  $V_\alpha = \text{Lin}\{2x^3 + 3\alpha x^2 - 8x - 2\alpha - 3, x^3 - 4\alpha x^2 - 4x + 4 - \alpha, x^3 + (3\alpha - 1)x^2 - 4x - 2\alpha - 1\}$ .

1. Določi kako bazo za  $U$ .
2. Določi kaki bazi za  $U \cap V_2$  in  $U + V_2$ .
3. Poišči vse take  $\alpha \in \mathbb{R}$ , da je  $U$  podprostor prostora  $V_\alpha$ .

①  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p'(0) = p(1) \Rightarrow c = a + b + c + d \Rightarrow a + b + d = 0 \Rightarrow d = -a - b$

$p(2) = p(-2) \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = -8a + 4b - 2c + d \Rightarrow 8a + 2c = 0 \Rightarrow c = -4a$

i)  $a=1 \Rightarrow c=-4 \quad ii) a=0 \Rightarrow c=0$   
 $b=0 \Rightarrow d=-1 \quad b=1 \Rightarrow d=-1$

$B_U = \{x^3 - 4x - 1, x^2 - 1\}$

②  $V_2: \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 & -7 \\ 1 & -8 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & -7 \\ 1 & 5 & -4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & -11 \\ 0 & 13 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & -11 \\ 0 & -13 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1/14), R_3 \cdot (-1/13)} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/14 \\ 0 & -1 & 0 & 7/13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/14 \\ 0 & 0 & 0 & 11/13 \end{bmatrix}$

$U + V_2: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_2, R_5 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \cdot (-1/3), R_5 \cdot (-1/11)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{U+V_2} = \{x^3 - 4x, x^2, 1\}$

$\Rightarrow \dim(U \cap V_2) = \dim U + \dim V_2 - \dim(U + V_2) = 2 + 3 - 3 = 2 \Rightarrow U \cap V_2 = U \Rightarrow B_{U \cap V_2} = B_U$

③  $U < V_\alpha$ , če lahko obe bazi vektorskega prostora  $U$  izrazimo z elementi, ki napeljujejo prostor  $V_\alpha$ , torej, ki sta rešljivi enačbi:

$a \begin{bmatrix} 2 \\ 3\alpha \\ -8 \\ -2\alpha-3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -4\alpha \\ -4 \\ -\alpha \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 3\alpha-1 \\ -4 \\ -2\alpha-1 \end{bmatrix} = v$ , kjer je  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$  ali  $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Enačbi rešimo hkrati:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3\alpha & -4\alpha & 3\alpha-1 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ -2\alpha-3 & -\alpha & -2\alpha-1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot 1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3\alpha & -4\alpha & 3\alpha-1 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ -2\alpha-3 & -\alpha & -2\alpha-1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3\alpha R_1, R_3 + 8R_1, R_4 + (2\alpha+3)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/2\alpha & -5/2\alpha-1 & -1/2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 4 \\ 0 & \alpha+3/2 & \alpha+3/2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-2/5\alpha)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 4 \\ 0 & \alpha+3/2 & \alpha+3/2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - (\alpha+3/2)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 2/5, R_1 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18/5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot 1/2, R_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/\alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18/5 \end{bmatrix}$

i)  $\alpha=1 \Rightarrow \text{rang } A = 2 = \text{rang } \tilde{A} \Rightarrow \text{sisteme imata rešitev} \Rightarrow U < V_\alpha$

ii)  $\alpha \neq 1 \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha+3/2 & -1/2 & -2/\alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+3/2 & -\alpha+3/2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - (\alpha+3/2)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha+3/2 & -1/2 & -2/\alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-2/(\alpha+3/2))} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/\alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{rang } A = 3 = \text{rang } \tilde{A} \Rightarrow \text{sisteme sta rešljivi} \Rightarrow U < V_\alpha$

Za vse  $\alpha \in \mathbb{R}$  je  $U < V_\alpha$ .