

PROSTORI IN PRESLIKAVE

Topologija je v osnovi študij zveznih preslikav in s tem povezanih pojmov. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ je zvezna, če točke, ki so si blizu v X preslika v točke, ki so si blizu v Y .

Pojem bližine je relativen, zato vedno formuliramo pogoje, ki jih je potrebno izpolniti za vsako možno natančnost.

LIMITA $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : n > N \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon$

ZVEZNOST $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna pri $a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
 f je zvezna, če je zvezna v vseh točkah domene.

Absolutna vrednost razlike je le zelo poseben primer razdalje med točkami; zato zveznost naravno formuliramo v metričnih prostorih:

METRIKA NA X $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$

- (1) $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$
- (2) $d(x, x') = d(x', x)$
- (3) $d(x, x') + d(x', x'') \geq d(x, x'')$

ZVEZNOST $f: (X, d) \rightarrow (X', d')$ je zvezna v točki $a \in X$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$
 f zvezna $\Leftrightarrow$ zvezna v vseh točkah.

Čeprav nam metrika omogoča, da preprosto obravnavamo bližino in zveznost smo v geometriji in v analizi že spoznali tudi primere, ki se jih ne da posebej naravno opisati v jeziku metrike.

LEBESGUE



POTENČNE VERSTE

$$f(x) \quad T_1(x), T_2(x), T_3(x), \dots \rightarrow f(x)$$

↑
evakomerna?

$$x, x - \frac{x^3}{6}, x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \dots \rightarrow \sinh(x)$$

odpake množica = množica, ki je shodna
vseh svojih točk

(shodna, v smislu, da obstaja $r > 0$,
 $h(x, r)$ je vedno v njej)

TOPOLOŠKI PROSTORI

X množica

Topologija na X je družina $\mathcal{T}$ podmnožic X , ki zadošča pogojem:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (2) podzibna unija elementov $\mathcal{T}$ je tudi element $\mathcal{T}$
- (3) končen presek elementov $\mathcal{T}$ je tudi element $\mathcal{T}$

$$\bigcap_{r>1} K(x, r) = K(x, 1)$$

Topološki prostor je par $(X, \mathcal{T})$. Elementi $\mathcal{T}$ so odprte množice.

PRIMERI



• Topologija iz metrike $(X, d) \rightsquigarrow (X, \mathcal{T}_d)$

$$\mathcal{T}_d: U \in \mathcal{T}_d \Leftrightarrow \forall x \in U \exists r > 0 : d(x, x') < r \Rightarrow x' \in U$$

(drugače povedano $K(x, r) \subseteq U$)

$\mathcal{T}_d$ je topologija, porojena z metriko d

$(X, \mathcal{T})$ je metrizabilen, če je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ za neko metriko d .

(X, d) , d lahko nadomestimo z omejeno metriko

$$\bar{d}(x, x') := \min\{d(x, x'), 1\}$$

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\bar{d}}$$

• $\mathbb{R}, \mathcal{T} := \{ \emptyset, \mathbb{R}, (x, +\infty), x \in \mathbb{R} \}$



$$\bigcup_{\lambda} (x_{\lambda}, +\infty) = (\inf_{\lambda} x_{\lambda}, +\infty)$$

$$\bigcap_{\substack{\lambda \\ \text{končna}}} (x_{\lambda}, +\infty) = (\max x_{\lambda}, +\infty)$$

Ali je $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ metrizabilen? NE, zato, ker ni disjunktne okolice

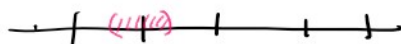
V metriznem prostoru: $x \neq x' \implies d(x, x') = r$

$K(x, \frac{r}{2})$, $K(x', \frac{r}{2})$ disj.

• trivialna in diskretna topologija

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ je topologija na X , trivialna topologija

$\mathcal{T} = 2^X$, $\mathcal{P}(X)$ diskretna topologija, npr. metrika
topologija na $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$



trivialna topologija (če ima X več kot eno točko) ni metrizabilna
diskretna topologija je metrizabilna $d(x, x') = \begin{cases} 0 & , x = x' \\ 1 & , x \neq x' \end{cases}$

OPOMBE

- unija prazne družine je $\emptyset$, presek prazne družine je X ,
zato je, formalno gledano, dovolj zahtevati (2) in (3), tj.

|| Topologija na X je družina podmnožic X , ki je zaprta za
poljubne unije in končne preseke

- variacije definicije (končne, števne, ... unije, števeni,
poljubni ... preseki) so možne, vendar dajejo drugačne
strukture

Današnja definicija je standardna, vendar se je
oblikovala kar precej časa (Brouwer, Frechet, Veblen,
Hausdorff, Kuratowski, ...).

- zahteva (3) lahko nadomestimo s: (3') presek dveh
elementov $\mathcal{T}$ je tudi element $\mathcal{T}$

(vendar potem moramo zahtevati $X \in \mathcal{T}$)