

2 Topologija

Naloga 2.1. Naj bo X množica in $\bullet \in X$ točka v njej. Označimo

$$\tau_{VT} := \{U \subseteq X \mid \bullet \in U \vee U = \emptyset\}.$$

- (a) Dokazite, da je τ_{VT} topologija na množici X (imenuje se **topologija vsebovane točke**).
- (b) Za $X = \mathbb{N}$ in $\bullet = 1$ določite notranjosti in zaprtja naslednjih podmnožic glede na topologijo τ_{VT} : $\mathbb{P}$ (= množica vseh praštevil), $\{2, 3\}$, $\{1, 4\}$.

Naloga 2.2. Za poljubno množico X definiramo

$$\tau_{KK} := \{U \subseteq X \mid U^c \text{ je končna} \vee U = \emptyset\}.$$

- (a) Dokazite, da je τ_{KK} topologija na množici X (imenuje se **topologija končnih komplementov**).
- (b) Za $X = \mathbb{N}$ določite notranjosti in zaprtja naslednjih podmnožic glede na topologijo τ_{KK} : $\{42\}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 42\}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 42\}$, $2\mathbb{N}$.
- (c) Dokazite: vsak podprostor prostora s topologijo končnih komplementov ima prav tako topologijo končnih komplementov.

Naloga 2.3. Naj bosta τ_1 in τ_2 topologiji na množici X . Dokazite, da so naslednje trditve ekvivalentne.

- (a) Topologija τ_1 je močnejša od topologije τ_2 .
- (b) Preslikava $\text{Id}_X: (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ je zvezna.
- (c) Za vsak topološki prostor Y in vsako preslikavo $f: X \rightarrow Y$ velja: če je $f: (X, \tau_2) \rightarrow Y$ zvezna, je tudi $f: (X, \tau_1) \rightarrow Y$ zvezna.
- (d) Za vsak topološki prostor Y in vsako preslikavo $f: Y \rightarrow X$ velja: če je $f: Y \rightarrow (X, \tau_1)$ zvezna, je tudi $f: Y \rightarrow (X, \tau_2)$ zvezna.

Naloga 2.4. Zapišite vse možne topologije na ničelementni, enoelementni, dvoelementni oz. troelementni množici.

Naloga 2.5.

- (a) Naj bosta τ_1 in τ_2 topologiji na množici X . Dokažite, da je tedaj tudi njun presek $\tau_1 \cap \tau_2$ topologija na X .
- (b) Naj bo $(\tau_i)_{i \in I}$ družina topologij na X . Dokažite, da je tedaj tudi njen presek $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ topologija na X .