

3 DOKAŽI TRDITEV:

ČE JE ŠTEVILO $2^n + 1$ PRAŠTEVILO, JE $n = 2^k$
ZA NEK $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

R: PREMISLIMO, DA IMA TA TRDITEV SMISEL.

$$n=1: 2^1 + 1 = 3 \text{ JE PRAŠTEVILO IN } 1 = 2^0 \checkmark$$

$$n=2: 2^2 + 1 = 5 \text{ JE PRAŠTEVILO IN } 2 = 2^1 \checkmark$$

$$n=3: 2^3 + 1 = 9 \text{ NI PRAŠTEVILO IN } 3 \neq 2^k \checkmark$$

$$n=4: 2^4 + 1 = 17 \text{ JE PRAŠTEVILO IN } 4 = 2^2 \checkmark$$

$\vdots$

V DOKAZU UPORABIMO FORMULO:

$$a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + \dots - ab^{m-2} + b^{m-1})$$

$\uparrow$
ČE m LIHO

ČE JE n LIHO ŠTEVILO TOREJ VELJA:

$$2^n + 1 = (2+1) \cdot (2^{n-1} - 2^{n-2} + \dots - 2 + 1)$$

TO ŠTEVILO BO PRAŠTEVILO LE, CE $n=1$ OZ. $2^1 + 1 = 3$.

TAKRAT DRŽI TUDI NAŠA TRDITEV, SAJ JE $1 = 2^0$ OZ. $k=0$.

ČE n NI LIHO ŠTEVILO, GA LAHKO ZAPIŠEMO V OBLIKI:

$$n = 2^l \cdot m, \text{ KJER JE } l \in \mathbb{N} \text{ IN } m \text{ LIH.}$$

$$2^n + 1 = 2^{2^l \cdot m} + 1 = (2^{2^l})^m + 1 = (2^{2^l} + 1)((2^{2^l})^{m-1} - \dots + 1)$$

ZNOVA BO TO ŠTEVILO PRAŠTEVILO LE, ČE BO $m=1$.

TO PA ŽE PONEI, DA JE $n = 2^l$ ZA $l \in \mathbb{N}$.

OPOMBA: NISO VSA ŠTEVILA OBLIKE 2^{2^k} PRAŠTEVILA.

{ PROTIPRIMER ZA TO JE $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$

④ NAJ BO $n \in \mathbb{N}$. DOKAŽI, DA JE $\sqrt{n}$ BODISI
NARAVNO BODISI IRACIONALNO.

SPOMNI MO:

$\sim z \in \mathbb{R}$ JE RACIONALNO, ČE $z = \frac{m}{n}$ ZA $m \in \mathbb{Z}$ IN $n \in \mathbb{N}$,
KI STA TUJA. OZNAKA $z \in \mathbb{Q}$.

$\sim z \in \mathbb{R}$ JE IRACIONALNO, ČE NI RACIONALNO. OZNAKA $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

DOKAZ S PROTISLOVJEM:

DENIMO, DA JE $\sqrt{n} = \frac{k}{m}$ ZA NEKI

TUJI ŠTEVILI $k \in \mathbb{N}$ IN $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$,

KJER STA k IN m TUJI.

TEDAJ VELJA:

$$n = \frac{k^2}{m^2}$$

$$n \cdot m^2 = k^2$$

KER $m \neq 1$, OBSTAJA NEKO PRŠTEVILLO, KI GA DELI.

NPR. $p \mid m$ OZ. $m = p \cdot l$.

IMAMO:
$$n \cdot p^2 \cdot l^2 = k^2$$

OD TOD SLEDI, DA p DELI TUDI k , KAR PA JE
PROTISLOVJE, SAJ STA k IN m TUJI ŠTEVILI.

⑤ NAJ BO $z \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x > 0$ IN y PA IRACIONALNI.

DOKAŽI, DA SO $\sqrt{x}$, $z+x$ IN $z \cdot x$ IRACIONALNA.

ALI TO DRŽI TUDI ZA $x+y$, $x \cdot y$ IN $\sqrt{z}$?

DOKAZ S PROTISLOVJEM:

DENIMO, DA $\sqrt{x} = \frac{m}{n}$ ZA $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$$x = \frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{Q} \quad \text{TO JE PROTISLOVJE}$$

DEJIMO, DA $x + \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$; $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$x + \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

$$x = \frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{mb - an}{n \cdot b} \in \mathbb{Q}$$

PROTISLOVJE, KER x IRACIONALEN

DEJIMO, DA $\frac{a}{b} \cdot x = \frac{m}{n}$

$$x = \frac{bm}{an} \in \mathbb{Q} \text{ PROTISLOVJE.}$$

OSTALE TRDITVE V SPLOŠNETI NE DRŽIJO, SAJ SE LAHKO NAJDE OBOJE:

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

⑥ POKAŽI, DA OBSTAJATA IRACIONALNI ŠTEVILI $x > 0$ IN $y > 0$,
DA JE ŠTEVILO x^y RACIONALNO.

R: $x = \sqrt{2}, \quad y = \log_{\sqrt{2}} 3$

$$x^y = (\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3 \in \mathbb{Q}$$

TREBA JE DOKAZATI, DA JE $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

DEJIMO, DA TO NI RES:

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

$$3 = (\sqrt{2})^{\frac{m}{n}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$3 = 2^{\frac{m}{2n}} \quad / \quad ^{2n}$$

$$3^{2n} = 2^m$$

$$9^n = 2^m$$

ZA NARAVNO ŠTEVILO n IN CELO m SE TO NE
MORE VEMATI. TOREJ JE y RES IRACIONALEN.