

3 Preslikave

Naloga 3.1. Za naslednje pare prostorov dokažite, da so homeomorfní:

- (a) intervala $[0, 1]$ in $[a, b]$, kjer $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
- (b) intervala $(0, 1)$ in $(0, \infty)$,
- (c) $S^1 \times [0, 1]$ in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,
- (d) zaprti krogli $\overline{K}_p((0, 0), 1)$ in $\overline{K}_\infty((0, 0), 1)$ v ravnini $\mathbb{R}^2$.

Naloga 3.2. Podajte zvezno bijekcijo $[0, 2\pi) \rightarrow S^1$. Obravnavajte zveznost njenega inverza s pomočjo zaporedij in s pomočjo kompaktnosti.

Naloga 3.3. Pokažite, da je spodnjih osem prostorov homeomorfnih.

$$\begin{aligned}X_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - |x| \wedge y \neq 1\} \\X_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y < 1\} \\X_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus [0, 1] \times \{0\} \\X_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y > 0\} \\X_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \wedge y \geq 0\} \\X_6 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \\X_7 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0\} \\X_8 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge 0 \leq y < 1\}\end{aligned}$$

Naloga 3.4. Dokažite: če ima preslikava $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokalni ekstrem, ni odprta preslikava.

Naloga 3.5. Dokažite: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ je zvezna in odprta preslikava, ni pa zaprta preslikava.