

⑦ POKAŽI, DA JE ŠTEVILO e IRACIONALNO.

R: SPOMNIMO SE, DA LAHKO KONSTANTO e DEFINIRAMO NA DVA NAČINA:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

V TEJ NALOZI SE BOMO NASLONILI NA PRVO DEFINICIJO.

DENIMO, DA JE e RACIONALNO ŠTEVILO:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

POMNŌŽIMO ELAČBO Z $n!$ IN DOBIMO:

$$\underbrace{\left(n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}\right)}_{\text{TO JE NEKO CELO ŠTEVILO}} + \underbrace{\left(\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots\right)}_{\text{TUDI NEKO CELO ŠTEVILO}} = m(n-1)!$$

TO POMEI, DA MORA BITI TUDI PREOSTALI OKLEPAJ NEKO CELO ŠTEVILO. DOKAZALI BOMO, DA TO NI RES.

OČENIMO:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \dots &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots < \\ < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots}_{\text{GEOMETRIJSKA VRSTA ZA } q = \frac{1}{n+1} \text{ IN PRVI ČLEN } \frac{1}{n+1}} &= \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1$$

PRISLI SMO V PROTISLOVJE, KER TA VSOTA NE MORE BITI CELO ŠTEVILO.

⑧ DOKAŽI: MED POLOJUBNIMA RAZLIČNIMA REALNIMA ŠTEVILOMA OBSTAJA IRACIONALNO ŠTEVILO.

R: TA TRDITEV POVE, DA JE MNOŽICA $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ GOSTA V $\mathbb{R}$.
TO LASTNOST STE DOKAZALI ZA $\mathbb{Q}$ V $\mathbb{R}$ ŽE NA
PREDAVANJIH, SEDAJ BOMO TO UPORABILI.

KONKRETNO: NAJ BOSTA $x, y \in \mathbb{R}$ IN $x < y$.

VENO, DA OBSTAJA $z \in \mathbb{Q}$, DA JE

$$x < z < y$$

KAKO BI Z PRETVORILI V IRACIONALNO ŠTEVILO?

ODGOVOR: POMNOŽIMO GA S $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2}x < \sqrt{2}z < \sqrt{2}y.$$

PROBLEM: SPREMENILI STA SE TUDI MED, NAŠLI SMO
IRACIONALNO ŠTEVILO MED $\sqrt{2}x$ IN $\sqrt{2}y$, NE PA
MED x IN y .

REŠITEV: ZAČNEMO Z $\frac{x}{\sqrt{2}}$ IN $\frac{y}{\sqrt{2}}$.

DOKAZ TRDITVE:

NAJ BOSTA $x, y \in \mathbb{R}$ IN $x < y$.

ZARADI GOSTOSTI $\mathbb{Q}$ V $\mathbb{R}$ OBSTAJA

$z \in \mathbb{Q}$, DA JE: $\frac{x}{\sqrt{2}} < z < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

KO TO ELAČBO POMNOŽIMO, DOBIMO
IRACIONALNO ŠTEVILO MED x IN y :

$$x < \underbrace{\sqrt{2}z}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} < y$$

PRINCIP POPOLNE (MATEMATIČNE) INDUKCIJE

ČE ŽELIMO NEKO TRDITEV (T_n) DOKAZATI ZA VSA
NARAVNA STEVILA $n \geq n_0$, ZADOŠČA POKAZATI:

(i) DA VELJA (T_{n_0})

(ii) DA IZ PREDPOSTAVKE, DA VELJA (T_n), LAHKO
SKLEPAMO, DA VELJA TUDI (T_{n+1}).

TOČKI (i) PRAVIMO BAZA INDUKCIJE, TOČKI (ii)
PA INDUKCIJSKI KORAK. PREDPOSTAVKI V (ii) REČEMO
INDUKCIJSKA PREDPOSTAVKA IN JO V NALOŽAH
OZNAČUJEMO Z I.P.

PRIMER:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{BAZA: } n=1 \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \checkmark$$

INDUKCIJSKI KORAK $n \rightarrow n+1$:

PRIVZAMEMO, DA FORMULA DRŽI ZA n
IN SKUŠAMO DOKAZATI:

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) &\stackrel{\text{i.p.}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n+1 = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

9) DOKAZI, DA ZA VSA $n \in \mathbb{N}$ VELJA:

$$(a) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(b) 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

R: (a) BAZA: $n=1$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \checkmark$

INDUKCIJSKI KORAK $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2 &\stackrel{\text{I.P.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

TO SMO ŽELELI DOKAZATI (ENAKOST ZA $n+1$).

(b) BAZA: $n=1$: $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} \quad \checkmark$

INDUKCIJSKI KORAK $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3 &\stackrel{\text{I.P.}}{=} \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ &= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

TO SMO ŽELELI DOKAZATI (ENAKOST ZA $n+1$).

(10) DOKAŽI, DA ZA VSE $n \in \mathbb{N}$ VELJA:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

BAZA INDUKCIJE $n=1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1} \quad \checkmark$$

INDUKCIJSKI KORAK $n \rightarrow n+1$:

PRIVZAMEMO LAHKO, DA JE

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n},$$

ŽELIMO PA DOKAZATI, DA JE TUDI

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

UPORABIMO INDUKCIJSKO PREDPOSTAVKO:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{\text{I.P.}}{\geq} \underbrace{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{ČE NAM USPE DOKAZATI} \\ \text{TO, SMO KONČALI!}}} \geq \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} \quad | \cdot \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n^2+n} + 1 \geq n+1 \quad | -1$$

$$\sqrt{n^2+n} \geq n \quad | ^2$$

$$n^2+n \geq n^2$$

$$n \geq 0$$

TO VEDNO DRŽI $\checkmark$
ZA $n \in \mathbb{N}$.