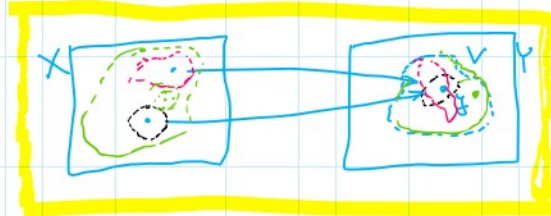


ZVEZNE PRESLIKAVE

Zveznost funkcije $f: X \rightarrow Y$ lahko opišemo tako: za vsak $y = f(x) \in Y$ in vsako okolico V točke y obstaja okolica točke x , ki jo f preslika v V .

Drugeče povedano, vsaka točka, ki se preslika v notranjo točko nekje $V \subseteq Y$ je notranja točka $f^{-1}(V)$.



Še drugače povedano (če so vsi y notranji)

|| preslika vsake množice, ki je odprta v Y je množica, ki je odprta v X .

To je (re)definicija zveznosti na način, ki ne omejuje posameznih točk, temveč le odprte množice.

Funkcija $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$ je **zvezna**, če je preslika vsake odprte množice odprta, tj. če

$$V \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$$

Primeri

- Zvezne funkcije med metričnimi prostori so zvezne tudi glede na s metrikami porojene topologije.

$$(X, d) \xrightarrow{f} (X', d') \quad f \text{ zvezna glede na } d \text{ in } d'$$

$$\Leftrightarrow f: (X, \mathcal{T}_d) \rightarrow (X', \mathcal{T}_{d'})$$

- **trivialna topologija** $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \text{trivialna top.})$
je vedno zvezna
 $\{\emptyset, Y\}$

- **diskretna topologija** $f: (X, \text{diskretna}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$
je vedno zvezna

- **konstantna funkcija** $y \in Y \quad \text{const}_y: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$
je vedno zvezna

(veših so konstante edine)

• identiteta?

$\text{Id}: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ je zvezna $\Leftrightarrow \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$
 $\hookrightarrow$ bolj groba $\hookrightarrow$ funkcija

Trditev Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava

Dokaz

$$(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{f} (X', \mathcal{T}') \xrightarrow{g} (X'', \mathcal{T}'') \quad g \circ f \text{ zvezna}$$

$(g \circ f)^{-1}(U) = (f^{-1}(g^{-1}(U)))$ $\xrightarrow{\text{odp}}$ $(f^{-1}(U))$ $\xrightarrow{\text{odp}}$ U

Množico vseh zveznih preslikav med $(X, \mathcal{T})$ in $(Y, \mathcal{T}')$ označimo $\mathcal{C}((X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}'))$, ali krajše $\mathcal{C}(X, Y)$.

Če je $Y = \mathbb{R}$ z običajno (euklidsko) topologijo: $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$

okrajšano: prostor = topološki prostor

preslikava = zvezna preslikava

"množica" - množica nima topologije, a jo gledamo neodvisno od topologije

"funkcija" - množica ni zvezna

IZREK (Karakterizacija zveznosti)

Ekvivalentne so izjave:

- (1) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ je zvezna
- (2) za vsak $V^{\text{odp}} \subseteq Y$ je $f^{-1}(V)$ odprt v X
(tj. $V \in \mathcal{T}' \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$)
- (3) za vsak $B^{\text{zap}} \subseteq Y$ je $f^{-1}(B)$ zaprt v X
(tj. $B^c \in \mathcal{T}' \Rightarrow (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{T}$)
- (4) za vsak $A \subseteq X$ velja $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

} definicija

Dokaz

(1) $\Leftrightarrow$ (2) je definicija zveznosti

(2) $\Leftrightarrow$ (3) sledi iz $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

(3) $\Rightarrow$ (4)

$$A \subseteq X \rightsquigarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$

$$A \subseteq X \rightsquigarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$

$\hookrightarrow$ zaprta po (3)

$$\rightsquigarrow \bar{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \rightsquigarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

$\hookrightarrow$ naju. ^{zaprta} ~~zaprta~~ nadmnožica A

(4) $\Rightarrow$ (3)

$$B^{\text{zap}} \subseteq Y \rightsquigarrow f(\overline{f^{-1}(B)}) \stackrel{(4)}{\subseteq} \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \bar{B} = B$$

$\hookrightarrow$ ker je $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

$\rightsquigarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$; to je možno le, če sta enaka,
torej ko je $f^{-1}(B)$ zaprt.



Pojasnilo (4)

$\forall$ metričnih prostorih: f je nerna $\Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i)$

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

X s trivialno topologijo, vse točke X so limite kakršnihkoli zaporedij

$\forall$ metričnem prostoru



$\text{lim} A = \text{"limite vseh zaporedij v } A" \subseteq \bar{A}$

$\forall$ splošnem topološkem prostoru nista nujno enaki