

Indukcija

1. Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo enakosti:

(a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$

(d) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n = 2^n(2n - 2) + 2.$

2. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

3. Dokaži Bernoullijevo neenakost: za vsako naravno število n in za vsako realno število $a > -1$ velja

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

4. Dokaži, da za vsako naravno število n velja neenakost

$$n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

5. Dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $n^5 - n$ deljiv s 5.

6. Dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $13^{2n} + 6$ deljiv s 7.

7. Dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $5^{n-1} + 2^n$ deljiv s 3.

8. Dokaži, da je za $n \geq 4$ število diagonal v n -kotniku enako $\frac{n(n-3)}{2}$.

9. Dokaži, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

10. Dokaži binomsko formulo: za vsaki realni števili a in b in za vsako naravno število n velja

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n.$$