

4 Baze in predbase, podprostor in vložitve

Naloga 4.1. Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ vpeljemo topologijo z bazo $\mathcal{B} := \{(-a, a) \mid a \in (0, \infty)\}$.

- (a) Pokažite, da je $\mathcal{B}$ dejansko baza neke topologije τ na $\mathbb{R}$.
- (b) Določite notranjost in zaprtje množic $(0, 2]$ in $[2, 4]$.
- (c) Obravnavajte konvergenco zaporedja $(1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Poiščite kakšno števno bazo topologije τ .

Naloga 4.2. Za $a, b \in \mathbb{N}$ definiramo množico

$$U_{a,b} := \{na + b \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{b, a + b, 2a + b, 3a + b \dots\}.$$

Označimo tudi

$$\mathcal{B} := \{U_{a,b} \mid a \text{ in } b \text{ sta si tuji naravni števili}\}.$$

- (a) Preverite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na $\mathbb{N}$. Označimo jo s τ .
- (b) Dokažite: za vsako praštevilo p je množica $p\mathbb{N}$ zaprta glede na τ .
- (c) Določite notranjost in zaprtje podmnožice $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Kako lahko od tod dobite topološki dokaz, da je praštevil neskončno?

Naloga 4.3. Označimo $X := \mathbb{N}^2 \cup \{(0, 0)\}$ in definirajmo

$$\tau := \left\{ U \subseteq X \mid (0, 0) \notin U \vee \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \Rightarrow (\{n\} \times \mathbb{N}) \setminus U \text{ je končna množica} \right\}.$$

- (a) Dokažite, da je τ topologija na X .
- (b) Dokažite, da točka $(0, 0)$ leži v zaprtju množice $\mathbb{N}^2$. Kakšne so nasplošno zaprte množice v topologiji τ ?
- (c) Dokažite, da ne obstaja zaporedje v $\mathbb{N}^2$, ki konvergira k $(0, 0)$. Sklepajte, da X ni 1-števen prostor.
- (d) Dokažite, da identiteta $\text{Id}_X: (X, \tau) \rightarrow (X, \text{diskretna topologija})$ ni zvezna pri $(0, 0)$, slika pa vsako konvergentno zaporedje v konvergentno zaporedje (ki konvergira k sliki limite).

Naloga 4.4. Naj bo X množica. Dokažite, da je $\mathcal{P} := \{\{x\}^c \mid x \in X\}$ pred baza topologije končnih komplementov na X .

Naloga 4.5. Pokažite, da je $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ homeomorfen netrivialnemu produktu dveh topoloških prostorov (produkt je **netrivialen**, kadar ima vsak faktor več kot eno točko).

Naloga 4.6. Označimo $X := \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ in definirajmo

$$\mathcal{P} := \{(-\infty, b) \times \{0, 1\} \mid b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \times \{0, 1\} \mid a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{B} := \{(a, b) \times \{0, 1\} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

- (a) Pokažite, da je $\mathcal{P}$ pred baza neke topologije na X in da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na X .
- (b) Pokažite, da se topologiji, porojeni s $\mathcal{P}$ oziroma z $\mathcal{B}$, ujemata.
- (c) Ugotovite, s kakšnimi topologijama moramo opremiti $\mathbb{R}$ in $\{0, 1\}$, da se topologija, porojena s $\mathcal{P}$ oz. z $\mathcal{B}$, ujema s produktno topologijo.

Naloga 4.7. Sorgenfreyeva topologija τ_S na množici realnih števil $\mathbb{R}$ vpeljemo z bazo

$$\mathcal{B}_S := \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Prostor $\mathbb{R}$, opremljen s topologijo τ_S , se imenuje tudi **Sorgenfreyeva premica**. Označimo jo z $\mathbb{R}_S$.

- (a) Preverite, da $\mathcal{B}_S$ res zadošča pogojem za bazo topologije na $\mathbb{R}$.
- (b) Dokazite, da je topologija τ_S strogo močnejša od običajne evklidske topologije τ_E na $\mathbb{R}$.
- (c) Določite notranjosti in zaprtja množic $(0, 1)$, $[0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1]$ v $\mathbb{R}_S$.
- (d) Dokazite, da sta tudi

$$\mathcal{B}' := \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}, a < b\},$$

$$\mathcal{B}'' := \{[a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a < b\}$$

bazi za τ_S .

- (e) Dokazite, da je

$$\mathcal{B}''' := \{[a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

baza neke topologije na $\mathbb{R}$, ki pa je strogo šibkejša od τ_S .

- (f) Ugotovite, ali je Sorgenfreyeva premica separabilen, 1-števen oz. 2-števen topološki prostor.
- (g) Produkt $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ imenujemo **Sorgenfreyeva ravnina**. Katerima prostoroma sta homeomorfna podprostora Sorgenfreyeve ravnine

$$D := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad L := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} ?$$

Naloga 4.8.

- (a) Preverite: vključitev $\mathbb{N}$ z diskretno topologijo v $\mathbb{R}$ z evklidsko topologijo je topološka vložitev. Ali je odprta, zaprta, oboje ali nobeno?
- (b) Preverite: vključitev $\mathbb{Q}$ z diskretno topologijo v $\mathbb{R}$ z evklidsko topologijo je zvezna injekcija, ni pa topološka vložitev.

Naloga 4.9. Naj bosta X in Y množici. Za $b \in Y$ definiramo *vodoravno rezino*

$$vr_b: X \rightarrow X \times Y, \quad vr_b(x) := (x, b)$$

in za $a \in X$ definiramo *navpično rezino*

$$nr_a: Y \rightarrow X \times Y, \quad nr_a(y) := (a, y).$$

- (a) Dokazite: če sta X in Y topološka prostora ter $X \times Y$ opremimo s produktno topologijo, so vse rezine topološke vložitve.
- (b) Naj bosta X in Y množici z izbranimi točkama $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Produkt $X \times Y$ opremimo z neko topologijo τ , množici X in Y pa s takšnima topologijama, da sta rezini vr_{y_0} in nr_{x_0} topološki vložitvi. Pokazite, da topologija τ ni nujno produktna.