

Naj bo $n > 1$. Dokaži, da je $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

Dokaz s protislovjem. Naj bo $\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{N}$,
 $a \perp b$

$a \perp b \Rightarrow a^2 \perp b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}$ je okrajšan ulomek

$$\Rightarrow n = k a^2 \quad \text{za } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n+1 = k b^2 = k a^2 + 1$$

Po drugi strani:

$$b > a \Rightarrow b \geq a+1 \Rightarrow b^2 \geq a^2 + 2a + 1$$

$$\Rightarrow b^2 > a^2 + 1$$

$$\Rightarrow k b^2 > k a^2 + k > k a^2 + 1$$

protislovje

Poišči $\sup B, \inf B, \min B, \max B$, kjer je $B = \left\{ \frac{n - \sqrt{n}}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$.

$$B = \left\{ 0, \frac{2-\sqrt{2}}{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \dots \right\}$$

$$\text{Očitno: } \forall x \in B: x \geq 0$$

$$0 \in B$$

$$\text{Torej je } 0 = \min B = \inf B$$

↓

kjer obstaja minimum
 množice, je tudi infimum

$\sup B, \max B?$

Vidimo: $\forall x \in B, x < 1$

1 je zgornja meja za B

Vidimo, da je za velike n (kot npr. za
sode potence 10) $\frac{n - \sqrt{n}}{n+1}$ blizu 1. Ideja

1 je najmanjša zg. meja za B

Dokazati: Želimo, da za vsak $c, c < 1$

obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\frac{n - \sqrt{n}}{n+1} > c$.

$$n - \sqrt{n} > cn + c$$

$$n(1 - c) > \sqrt{n} + c \quad |: \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n}(1 - c) > 1 + \frac{c}{\sqrt{n}}$$

Ker je $\{\sqrt{n}(1 - c) \mid n \in \mathbb{N}\}$ naraščajoče omejena*,
 $\{1 + \frac{c}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ pa je naraščajoče omejena, od
neenakosti zagotovo velja od nekega n naprej.

*to upoštevamo $c < 1$

Lahko bi tudi poiskali konkretno podmnožico
 $B' \subseteq B$, katere elementi bi očitno naraščali proti 1,
denimo

$$\left\{ \frac{10^{2k} - 10^2}{10^{2k+1}} ; k \geq 1 \right\}$$