

Intuitivno, potrebujemo funkcijo $f: X \rightarrow X'$, ki je bijekcija in ki obenem določa bijekcijo med $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$.

$$\begin{array}{ccc} f: X \xrightarrow{\text{bij}} X' & \rightsquigarrow & \mathcal{P}X \xrightarrow{\pm \text{bij}} \mathcal{P}X' \\ \downarrow \cup & & \downarrow \cup \\ \pm A \mapsto f(A) & & \mathcal{J} \xrightarrow{\pm \text{bij}} \mathcal{J}' \end{array}$$

Pišemo $(X, \mathcal{T}) \approx (X', \mathcal{T}')$ in pravimo, da sta prostora homeomorfnata.

- (1) $f: X \rightarrow X'$ je homeomorfizam
- (2) f je bijekcija, f i f^{-1} su zvezni.
- (3) f je zvezna, odprta bijekcija.
- (4) f je zvezna, zaprta bijekcija.

(f je **odprta**, če $U \in \mathcal{T} \Rightarrow f(U) \in \mathcal{T}'$)
(f je **zaprta**, če $A^c \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A)^c \in \mathcal{T}'$)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' \\ \mathcal{U} & \xleftarrow{(\gamma)^{-1}} & \mathcal{U}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\gamma^{-1}} & \mathcal{U}' \end{array}$$

f^{-1} vezma $\Rightarrow f$ (odreka u X) je odpru X
 $f(J) \subseteq J'$
 $\hookrightarrow f(\text{razpoto})$ je razpoka u X'

f je: odneta, se je: sledila vsake odpr. poskušanje x odneta v x
zapeta — " zap. — zap. +

$$f \text{ bijektiv} \Rightarrow (f \text{ surj} \Leftrightarrow f \text{ inj})$$

če f ni bijekcija sta projekcija različna (npr. konstante)
so praviloma zaprti in niso odprti)

- $[a, b] \approx [c, d]$ $f(x) := \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$

navedili
na vajah

- $(-1, 1) \approx \mathbb{R}$ veď možnosti: napr. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $f^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$

beliefe $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Vsaki interval (vključno z neskončnimi) je homeomorfen enemu izmed $(-1,1)$, $[-1,1]$, $[-1,1)$.

Kako vemo, da so te različni?

$$(-1,1) \not\approx [-1,1] \quad f: (-1,1) \rightarrow [-1,1]$$

$\hookrightarrow$ ni kompaktna $\quad \hookrightarrow$ kompaktna
 $[-1,1)$

$$(-1,1) \not\approx [-1,1) \quad [-1,1) \xrightarrow{f} (-1,1)$$

$-1 \mapsto a$
 $(-1,1) \rightarrow (-1,a) \cup (a,1)$
 $\longleftrightarrow \quad \longleftrightarrow$

Topološka lastnost je lastnost $(X, \mathcal{T})$, ki se ohranja pri homeomorfizmih npr. kompaktnost in povezanost

$(-1,1) \approx \mathbb{R}$ poln, polnost ni top. lastnost

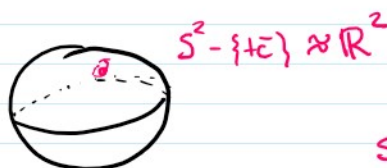
- $B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| \leq 1\}$ enotska krogla v $\mathbb{R}^n$ (zaprta) 
- $\overset{\circ}{B}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| < 1\}$ odprta enotska krogla v $\mathbb{R}^n$ 
- $S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| = 1\}$ enotska sfera v $\mathbb{R}^n$ 

$$\overset{\circ}{B}^n \approx \mathbb{R}^n \quad f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1-|\vec{x}|}, \quad f^{-1}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1+|\vec{x}|}$$

$(-1,1) \approx \mathbb{R}$ $\frac{1}{1-|\vec{x}|} \cdot \vec{x}$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ zaprta, omejena, konveksna, z neprazno notranostjo $\Rightarrow A \approx B^n$
 $\Leftrightarrow$ kompaktna D.N.

$S^{n-1} - \{(0, \dots, 0, 1)\} \approx \mathbb{R}^{n-1}$



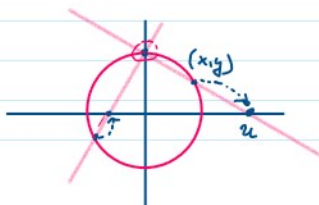
$S^1 - \{+e\} \approx \mathbb{R}$

$n=2: S^1 - \{(0,1)\} \approx \mathbb{R}^1$



$n=2$:

$$S^1 - \{(0,1)\} \approx \mathbb{R}^1$$



$$(x,y) \in S^1$$

točke $(0,1)$, (x,y) in $(u,0)$ so na isti premici, če je $\frac{u-0}{0-1} = \frac{x-0}{y-1} \leadsto u = \frac{x}{1-y}$

$$f(x,y) = \frac{x}{1-y} \quad \text{ima inverz} \quad f^{-1}(u) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1} \right)$$

Posplošitev:

$$S^{n-1} - \{(0, \dots, 0, 1)\} \xleftrightarrow[f^{-1}]{f} \mathbb{R}^{n-1}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1-x_n} (x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{oz.} \quad f(\vec{x}, y) = \frac{\vec{x}}{1-y}$$

$$f^{-1}(\vec{x}) = \left(\frac{2\vec{x}}{|\vec{x}|^2+1}, \frac{|\vec{x}|^2-1}{|\vec{x}|^2+1} \right)$$

Preslikavi f pravimo **stereografska projekcija**. Pogosto rečemo, da S^n dobimo tako, da $\mathbb{R}^n$ dodamo "točko v neskončnosti".

Posebej $S^2 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ **Riemannova sfera**

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi) &\rightarrow S^1 \\ f(x) &= e^{ix} \end{aligned}$$

Uč

D.N. preverite
biječnost
zveznost
odprtost
zaprtaost

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow S^1 \\ f(z) &= z^2 \end{aligned}$$