TGP, 2021/22
1. VAJE : 6. 10. 2021

1. Ali je $\mathbb{Z}^2$ prost grupa? Pokaži, da je $\mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y \mid [x, y] \rangle$.

2. Ali ste grupi $\langle x, y \mid xy^{2021}x = yx^{2022} \rangle, \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ trivialni?

3. Naj bo
$$L = \langle a, t \mid a^2, [t^k a t^{-k}, t^j a t^{-j}] \text{ za } j, k \in \mathbb{Z} \rangle$$
svetilkarjeva grupa.

   Predpis
$$a \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
določa homomorfizem $\varphi\colon L \to \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Z}_2[x, x^{-1}]\right)$. Eksplicitno zapiši inverzno preslikavo $\psi\colon \operatorname{im}\varphi \to L$.
$$\operatorname{im}\varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{Z}, P \in \mathbb{Z}_2[x, x^{-1}] \right\}$$

4. Pokaži, da svetilkarjeva grupa L ni končno prezentirana.

   (a) Pokaži, da je končno generirana grupa $G = \langle S \mid R \rangle$ končno prezentirana natanko tedaj, ko je $G = \langle S \mid R' \rangle$ za neko končno podmnožico $R' \subset R$.

   - Če je $\langle\langle R \rangle\rangle$ končno generirana edinka, potem jo lahko generiramo s končno podmnožico $R' \subset R$.
   - Če je $\langle S_1 \mid R_1 \rangle \cong \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ in je $|S_1|, |S_2|, |R_2| \leq \infty$, potem je tudi $\langle\langle R_1 \rangle\rangle$ končno generirana.
$$\langle S_1 \mid R_1 \rangle \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup X \rangle = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_2 \cup X \rangle = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup X \rangle,$$
kjer z relacijami X izrazimo generatorje iz S_1 z generatorji iz S_2. Sklepaj, da je $\langle\langle R_1 \cup X \rangle\rangle = \langle\langle R_1' \cup X \rangle\rangle$ za neko končno podmnožico $R_1' \subset R_1$ in $\langle S_1 \mid R_1 \rangle = \langle S_1 \mid R_1' \rangle$.

   (b) Pokaži, da je
$$L \cong \langle a, t \mid a^2, (a, t^n a t^{-n})^2 \text{ za } n \in \mathbb{N} \rangle.$$

   (c) Naj bo
$$G_N = \langle a, t \mid a^2, (a t^n a t^{-n})^2 \text{ za } n \in 1, \ldots, N \rangle.$$

   Pokaži, da je homomorfizem $\pi_N\colon G_N \to G_{N+1}$ določen z $a, t \mapsto a, t$ surjektiven in ne injektiven.

   - Poglej si homomorfizem $\phi_N\colon G_N \to S_{2N+3}$ določen z
$$a \mapsto (12), t \mapsto (123 \cdots (2N+2)(2N+3))^2.$$
   - Sklepaj, da $G_N \ncong G_{N+1}$ in da L ni končno prezentirana.