

TGP, 2021/22

2. VAJE : 13.10.2021

1. Naj bo

$$G = (\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z},$$

kjer je $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2)$ definiran z $i \mapsto ((g_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mapsto (g_{j+i})_{j \in \mathbb{Z}})$. Pokaži, da je G izomorfna svetilkarjevi grupi.

Oglej si venčni produkt (Restricted wreath product) $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$.

2. Pokaži, da za grupo G obstaja edinka $N \triangleleft G$ in podgrupa $H \leq G$ z $NH = G$ in $N \cap H = \{1\}$ natanko tedaj ko je $G \cong N \rtimes H$.

- Pokaži, da se da vsak element grupe G enolično zapisati z $g = nh$ z $n \in N$, $h \in H$.

3. Razširitvi sta ekvivalentni, če obstajajo izomorfizme tako, da diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \cong & & \downarrow = & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

komutira.

Poišči tri neekvivalentne razširitve

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 1.$$

- $\mathbb{Z}, n \mapsto n \pmod{3}$
- $\mathbb{Z}, n \mapsto -n \pmod{3}$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$

Poišči dve neekvivalentni razširitvi

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

- $x \mapsto (0, x)$
- $x \mapsto (2x, 0)$

4. Naj bo $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}), n \mapsto (-1)^n \text{id}_{\mathbb{Z}}$ in $G = \mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$.

Pokaži, da $G \not\cong \mathbb{Z}^2$. Skiciraj Cayleyev graf za kakšno končno množico generatorjev.

5. Naj bo $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ in $G = \langle A \rangle$. Grupa G deluje na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ z matričnim množenjem.

- Naj G deluje prosto na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pokaži, da G deluje prosto na $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
- Za $n \geq 2$ poišči $A \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$ za katero G deluje prosto na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

6. Naj S_3 deluje nase s konjugiranjem. Določi stabilizatorje in množice fiksnih točk.