

Elementarna geometrija

Hilbertovi aksiomi

Začnimo s pregledom Evklidovih aksiomov:

- E1 Za poljubni različni točki A in B obstaja natanko ena premica p , ki vsebuje A in B .
- E2 Za poljubni daljici AB in CD obstaja natanko ena točka E , da je B med A in E ter je daljica CD skladna z daljico BE .
- E3 Za poljubni različni točki A in B obstaja krožnica s središčem A in polmerom AB .
- E4 Vsi pravi koti so skladni.
- E5 Za vsako premico p in vsako točko A , ki ne leži na p , obstaja natanko ena premica q skozi A , ki je vzporedna p .

Na podlagi teh aksiomov je Evklid v svojih knjigah izpeljal osnovne rezultate ravninske geometrije, ki se jih še v današnjih časih učimo v osnovnih in srednjih šolah. Če nekatere od teh dokazov bolj podrobno analiziramo, pa opazimo, da se tu in tam Evklid skliče na opazke, ki so razvidne s skice, ne sledijo pa iz aksiomov. To je konec 19. stoletja matematike motiviralo, da bi sestavili nov nabor aksiomov, iz katerih bi lahko izpeljali trditve v Evklidovih knjigah brez sklicevanja na stvari, ki so nam jasne s skic. Mi bomo pri tem predmetu spoznali nabor 15 Hilbertovih aksiomov, ki jih lahko razdelimo v 5 skupin. Začeli bomo s študijem aksiomov o vsebovanosti, ki določajo medsebojno lego točk in premic v ravnini.

AKSIOMI VSEBOVANOSTI:

- V1 Za poljubni različni točki A in B obstaja natanko ena premica p , ki vsebuje A in B .
- V2 Na vsaki premici ležita vsaj dve različni točki.
- V3 Obstajajo tri različne nekolinearne točke.

Model aksiomov vsebovanosti sestoji iz para množic $\mathcal{T}$ in $\mathcal{P}$, ki zadoščata aksiomom V1, V2 in V3. S $\mathcal{T}$ označimo množico točk, s $\mathcal{P} \subset 2^{\mathcal{T}}$ pa množico premic. Če za neko točko $T \in \mathcal{T}$ in neko premico $p \in \mathcal{P}$ velja $T \in p$, rečemo, da T leži na p oziroma, da gre p skozi T .

Za različni premici p in q v našem modelu definiramo, da sta *vzporedni*, če je $p \cap q = \emptyset$. Za vsako premico p tudi definiramo, da je vzporedna sama s sabo. Opomnimo, da nismo v naših aksiomih nikjer zahtevali, da so premice ravne, niti ne, da so sploh krivulje. Prav tako nismo zahtevali, da imata vzporedni premici isto smer, pač pa le, da se ne sekata. Glede na to, kakšne lastnosti imajo vzporednice, ločimo tri osnovne tipe geometrij:

- (1) evklidsko (oziroma bolj splošno afino),
- (2) sferično (oziroma njej sorodno projektivno),
- (3) hiperbolično.

Lastnosti teh treh geometrij glede vzporednic lahko opišemo z naslednjimi aksiomi:

E Za vsako premico p in vsako točko A , ki ne leži na p , obstaja natanko ena premica q skozi A , ki je vzporedna p .

S Poljubni različni premici se sekata.

H Obstaja premica p in točka A , ki ne leži na p , skozi katero potekata vsaj dve vzporednici premice p .

V naslednjih nalogah si bomo pogledali nekaj konkretnih naborov množic točk in premic in preverili, katerim od zgornjih aksiomov zadoščajo.

(1) Za naslednje modele ugotovi, katerim aksiomom o vsebovanosti oziroma vzporednosti ustrezajo:

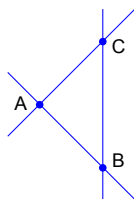
(a) $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$, $\mathcal{P} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$,

(b) $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$, $\mathcal{P} = \{\{A\}, \{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$,

(c) $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$, $\mathcal{P} = \{\{A, B\}, \{A, C\}\}$,

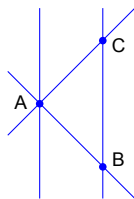
(a) $\mathcal{T} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$.

Rešitev: (a) Imamo model, ki ima tri točke in tri premice.



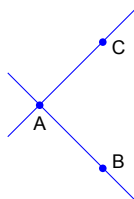
Ta model zadošča aksiomom V1, V2, V3 in S, ne zadošča pa aksiomoma E in H.

(b) Sedaj imamo podoben model kot prej, le da smo mu dodali eno premico, ki vsebuje eno samo točko A .



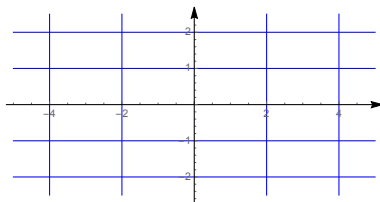
Ta model zadošča aksiomoma V1 in V3, ostalim aksiomom pa ne.

(c) Tokrat imamo podoben model, kot v (a) primeru, le da smo mu odstranili eno premico.



Ta model zadošča aksiomom V2, V3 in S.

(d) Sedaj imamo model, ki ima za točke kar točke v $\mathbb{R}^2$, za premice pa vzamemo vse vodoravne in navpične premice v $\mathbb{R}^2$.

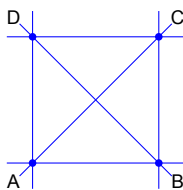


V tem modelu veljajo aksiomi V2, V3 in E, ostali aksiomi pa ne. □

(2) Za naslednje modele ugotovi, katerim aksiomom o vsebovanosti oziroma vzporednosti ustrezajo:

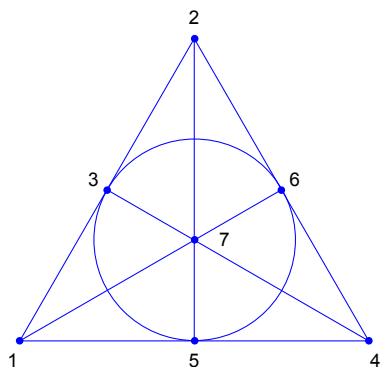
- (a) $\mathcal{T} = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{P} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$,
- (b) $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathcal{P} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$,
- (c) $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{P} = \{\text{vse podmnožice z dvema elementoma}\}$.

Rešitev: (a) Ta model zadošča aksiomom V1, V2, V3 in E. Modelu, ki zadošča tem štirim aksiomom rečemo *afina ravnina*.



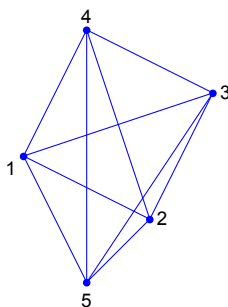
Če označimo z $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ končen obseg z dvema elementoma, je naša afina ravnina izomorfna afini ravnini $\mathbb{Z}_2^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

(b) Tokrat v našem modelu veljajo aksiomi V1, V2, V3 in S.



Modelu, ki zadošča tem štirim aksiomom in ima na vsaki premici vsaj 3 točke, rečemo *projektivna ravnina*. Tej projektivni ravnini rečemo Fanova ravnina, zanimiva pa je zato, ker je projektivna ravnina nad obsegom $\mathbb{Z}_2$ in ima hkrati najmanjše možno število točk.

(c) Ta model zadošča aksiomom V1, V2, V3 in H. Je primer končne hiperbolične ravnine.

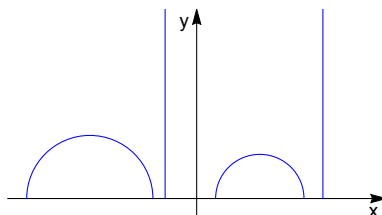


□

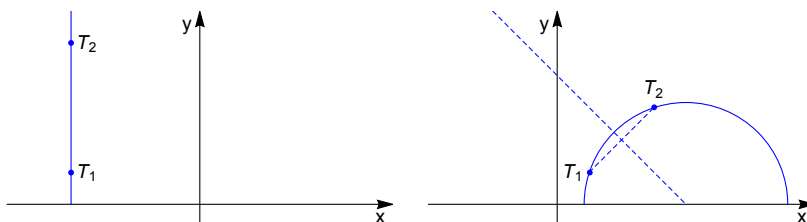
(3) Za naslednje modele ugotovi, katerim aksiomom o vsebovanosti oziroma vzporednosti ustrezajo:

- (a) $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $\mathcal{P} = \{\text{navpični poltraki in polkrožnice s središči na } x\text{-osi}\}$,
- (b) $\mathcal{T} = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $\mathcal{P} = \{\text{glavne krožnice}\}$,
- (c) $\mathcal{T} = \{\text{pari antipodnih točk na } S^2\}$, $\mathcal{P} = \{\text{množice parov, ki ležijo na glavnih krožnicah}\}$.

Rešitev: (a) Obravnavali bomo model hiperbolične ravnine, ki mu rečemo Poincaréjeva polravnina. Premice v tem modelu so navpični poltraki in polkrožnice s središči na x -osi.



Vsaka premica v tem modelu vsebuje neštevno mnogo točk, zato je izpolnjen aksiom V2. Ker nobena premica ne vsebuje vseh točk v polravnini, je izpolnjen tudi aksiom V3. Da pokažemo, da ta model zadošča aksiomu V1, moramo ločiti dva primera. Če imata točki T_1 in T_2 enako abscisno koordinato, ležita na navpičnem poltraku pri dani abscisni koordinati. Če pa sta njuni abscisni koordinati različni, pa ležita na polkrožnici, ki ima središče v preseku abscisne osi in simetrale daljice T_1T_2 .



Preverimo lahko, da ta model zadošča aksiomom V1, V2 in V3.

(b) V tem modelu veljajo aksiomi V2, V3 in S.

(c) Ta model zadošča aksiomom V1, V2, V3 in S. Je model realne projektivne ravnine. □

- (4) Pokaži, da so aksiomi V1, V3 in E neodvisni in da lahko iz njih izpeljemo aksiom V2.

Rešitev: Nabor aksiomov je neodvisen, če lahko za poljubnega izmed njih najdemo model, v katerem ta aksiom ne velja, preostali aksiomi pa veljajo.

(1) Kot model, v katerem veljata aksioma V1 in V3, ne velja pa aksiom E, lahko vzamemo hiperbolično ravnino.

(2) Kot model, v katerem veljata aksioma V1 in E, ne velja pa V3, lahko vzamemo model:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{A, B, C\}, \\ \mathcal{P} &= \{\{A, B, C\}\},\end{aligned}$$

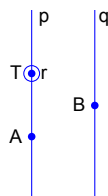
ki ima eno premico in tri točke na tej premici.

(3) Model, v katerem veljata aksioma V3 in E, ne velja pa V1, pa je na primer

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{A, B, C\}, \\ \mathcal{P} &= \{\{A\}, \{B\}, \{C\}\}.\end{aligned}$$

Recimo sedaj, da imamo model, v katerem veljajo aksiomi V1, V3 in E. Pokazali bomo, da potem v tem modelu velja tudi aksiom V2. Pa recimo, da obstaja premica r z eno samo točko T .

- Po aksiomu V3 obstaja točka $A \neq T$.
- Po aksiomu V1 obstaja premica p , ki poteka skozi točki A in T .
- Po aksiomu V3 lahko najdemo točko B , ki ne leži na p .
- Po aksiomu o vzporednosti E obstaja vzporednica premice p skozi B , ki ji recimo q .
- Skozi točko T potem potekata dve vzporednici p in r premice q , kar pa je v protislovju z aksiomom E.

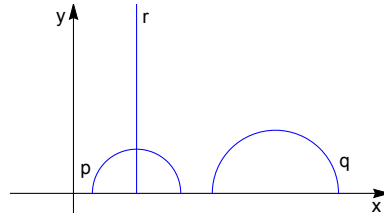


□

- (5) (a) Pokaži, da je v vsakem modelu, ki zadošča aksiomom V1, V2, V3 in E, vzporednost premic ekvivalenčna relacija.
- (b) Poišči model, ki zadošča aksiomom V1, V2 in V3, v katerem vzporednost premic ni ekvivalenčna relacija.

Rešitev: (a) Po definiciji sta premici vzporedni natanko takrat, ko sta enaki ali pa se ne sekata. Od tod takoj sledi, da je relacija vzporednosti refleksivna in simetrična. Pokazati pa moramo še, da je tranzitivna. Vzemimo poljubne premice p , q in r in naj bo p vzporedna q in q vzporedna r . Recimo, da p in r nista vzporedni. Od tod sledi, da se p in r sekata v neki točki T . Skozi točko T bi potem potekali dve vzporednici p in r premice q , kar pa je v protislovju z aksiomom E.

(b) V hiperbolični ravnini vzporednost premic ni ekvivalenčna relacija. Protiprimer je prikazan na spodnji sliki. Velja $p \parallel q$ in $q \parallel r$, vendar pa premici p in r nista vzporedni.



□

Nevtralna ravnina je model, ki zadošča Hilbertovim aksiomom V1-V3, M1-M4, S1-S6 in D. Izkaže se, da imamo do izomorfizma natančno dva modela nevtralne ravnine:

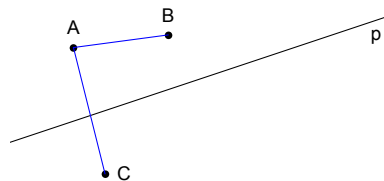
- (1) evklidska ravnina
- (2) hiperbolična ravnina

Vse trditve, ki jih izpeljemo v nevtralni ravnini, torej veljajo v evklidski in v hiperbolični ravnini.

- (6) Pokaži, da vsaka premica razdeli nevtralno ravnino na natanko dve polravnini.

Rešitev:

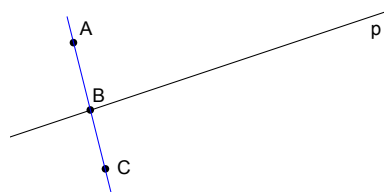
Definicija. Naj bo p premica v nevtralni ravnini in A , B in C točke, ki ne ležijo na p . Potem rečemo, da ležita A in B na istem **bregu** premice p , če daljica AB ne seka premice p . Točki A in C ne ležita na istem bregu premice p , če daljica AC seka premico p .



Iz aksioma M4(i) sledi, da je 'biti na istem bregu premice p ' ekvivalenčna relacija na komplementu premice p . Pokazali bomo, da za vsako premico p obstajata natanko dva bregova, ki jima rečemo *polravnini*.

Obstajata vsaj dva bregova premice p :

- Po aksiomu V3 obstaja točka A , ki ne leži na premici p .
- Po aksiomu V2 obstaja točka B na premici p .
- Po aksiomu M2 obstaja točka C na premici $\overleftrightarrow{AB}$, da je $A * B * C$.
- Ker je $A * B * C$, daljica AC seka premico p , kar pa pomeni, da ležita točki A in C na različnih bregovih premice p .



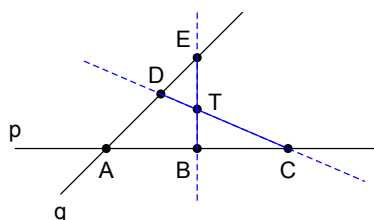
Obstajata največ dva bregova premice p :

- Naj bosta A in C točki na različnih bregovih premice p kot zgoraj.
- Recimo, da obstaja še en breg premice p , ki vsebuje točko D .
- Točka D bi potem ležala na različnem bregu p kot A in hkrati na različnem bregu p kot C . Po aksiomu M4(ii) pa bi od tod sledilo, da sta A in C na istem bregu, kar nas pripelje v protislovje.

□

- (7) Naj bosta p in q različni premici v nevtralni ravnini, ki se sekata v točki A . Privzemimo, da za točki $B, C \in p$ velja $A * B * C$ in da za točki $D, E \in q$ velja $A * D * E$. Pokaži, da se daljici BE in CD sekata.

Rešitev: Poglejmo najprej skico.



- Iz podatkov naloge sledi, da sta točki A in B na istem bregu premice $\overleftrightarrow{CD}$, točki A in E pa na različnih bregovih premice $\overleftrightarrow{CD}$.
- Po aksiomu M4 (ii) sta torej točki B in E na različnih bregovih premice $\overleftrightarrow{CD}$, od koder sledi, da je $BE \cap \overleftrightarrow{CD} = \{T\}$ in $B * T * E$.
- Analogno lahko pokažemo tudi, da je $\overleftrightarrow{BE} \cap CD = \{T\}$ in $C * T * D$. Torej je $BE \cap CD = \{T\}$.

□

- (8) Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni ravnini, za katerega velja $\angle BAC \cong \angle ABC$. Pokaži, da je potem $AC \cong BC$.

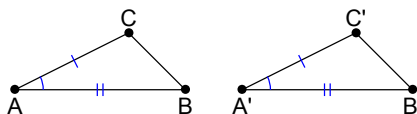
Rešitev: Začnimo z definicijo skladnosti trikotnikov v nevtralni ravnini.

Definicija. Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ v nevtralni ravnini sta skladna, če imata skladne istoležne stranice in kote.

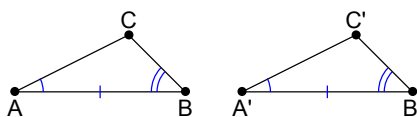
Po definiciji sta torej trikotnika skladna, če se ujemata v šestih parametrih, treh stranicah in treh kotih. Pokazati se da, da sta trikotnika avtomatično skladna, če se ujemata v štirih ali pa v petih parametrih. Pogosto pa je že dovolj, če se ujemata v treh parametrih. Poglejmo si osnovne kriterije, ki nam zagotavljajo skladnost trikotnikov.

Kriteriji za skladnost trikotnikov v nevtralni ravnini:

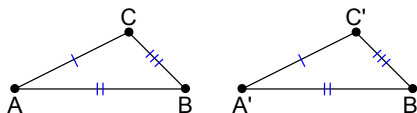
(1) (SKS) Stranica-kot-stranica: To je v bistvu aksiom skladnosti S6, ki pravi, da sta trikotnika skladna, če imata skladna dva para stranic in par vmesnih kotov.



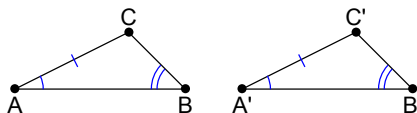
(2) (KSK) Kot-stranica-kot: To je trditev, ki pravi, da sta trikotnika skladna, če imata skladen en par stranic in oba para priležnih kotov.



(3) (SSS) Stranica-stranica-stranica: To je trditev, ki pravi, da sta trikotnika skladna, če imata skladne vse tri pare stranic.



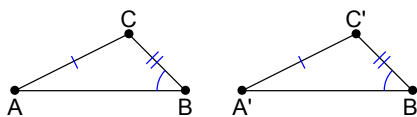
(4) (SKK) Stranica-kot-kot: To je trditev, ki pravi, da sta trikotnika skladna, če imata skladna dva para kotov in par stranic, ki sta nasproti enemu paru kotov.



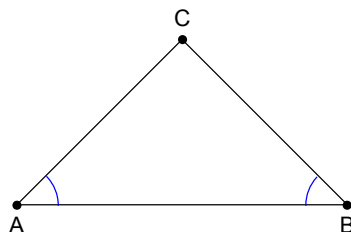
S kombinatoričnega stališča sta nam ostali še dve možnosti: KKK in SSK. KKK ni kriterij v nevtralni ravnini, saj imamo na primer v evklidski ravnini podobne trikotnike (ki imajo skladne kote), ki niso skladni. Je pa KKK kriterij v hiperbolični ravnini, kjer sta dva podobna trikotnika avtomatično skladna.

Druga preostala možnost je SSK. V splošnem SSK ni kriterij za podobnost trikotnikov v nevtralni ravnini, je pa v naslednjem posebnem primeru.

(SSK) Stranica-stranica-kot: Ta kriterij velja samo v primeru, ko sta skladna kota nasproti daljšemu paru skladnih stranic.



Poglejmo si sedaj našo skico.



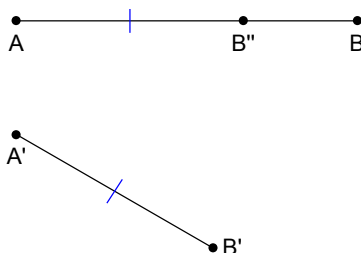
Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle BAC$ imata skupno stranico AB in skladna kota $\angle BAC \cong \angle ABC$. Po kriteriju KSK sta torej skladna, od koder pa sledi, da je $BC \cong AC$. $\square$

- (9) Pokaži, da v poljubnem trikotniku $\triangle ABC$ v nevtralni ravnini velja trikotniška neenakost:

$$AC < AB + BC.$$

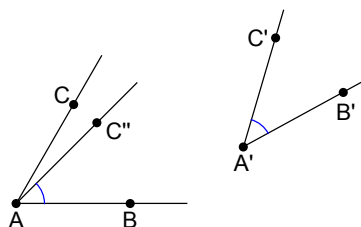
Rešitev: Pri študiju trikotnikov v kartezičnem modelu evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ smo navajeni, da trikotniško neenakost izrazimo kot neenakost med dolžinami stranic. Zato moramo najprej razložiti, kaj zgornja neenakost pomeni v kontekstu nevtralne ravnine.

Definicija. Za daljici AB in $A'B'$ v nevtralni ravnini definiramo $AB > A'B'$, če obstaja točka B'' na daljici AB , da je $AB'' \cong A'B'$.



Podobno lahko definiramo tudi relacijo neenakosti na množici kotov v nevtralni ravnini.

Definicija. Za kota $\angle BAC$ in $\angle B'A'C'$ v nevtralni ravnini definiramo $\angle BAC > \angle B'A'C'$, če obstaja točka C'' v notranjosti kota $\angle BAC$, da je $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$.

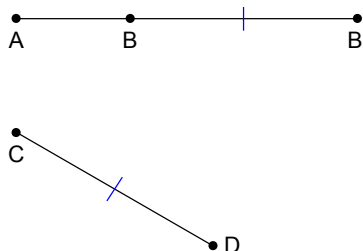


Osnovni lastnosti relacij neenakosti na daljicah in kotih sta strnjeni v naslednji trditvi.

- Trditev** (Zakona trihotomije). (1) Za poljubni daljici AB in CD v nevtralni ravnini je bodisi $AB \cong CD$ bodisi $AB > CD$ bodisi $AB < CD$.
 (2) Za poljubna kota $\angle BAC$ in $\angle B'A'C'$ v nevtralni ravnini je bodisi $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ bodisi $\angle BAC > \angle B'A'C'$ bodisi $\angle BAC < \angle B'A'C'$.

Za konec si pogledjmo še definicijo vsote dveh daljic v nevtralni ravnini.

Definicija. Naj bosta AB in CD daljici v nevtralni ravnini. Izberimo točko B' na premici $\overleftrightarrow{AB}$, za katero je $A * B * B'$ in $BB' \cong CD$. Potem definiramo $AB + CD := AB'$.

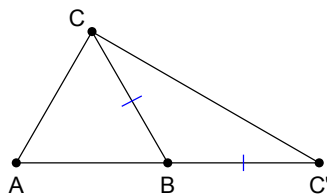


Pri dokazu trikotniške neenakosti bomo uporabili naslednjo trditev s predavanj.

Trditev. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni ravnini. Potem je v trikotniku večji kot nasproti večji stranici in obratno. To pomeni, da je

$$BC > AC \iff \angle BAC > \angle ABC.$$

Dokažimo sedaj trikotniško neenakost.



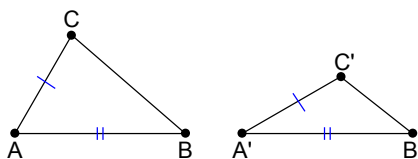
- Na premici $\overleftrightarrow{AB}$ izberimo točko C' , da je $A * B * C'$ in $BC \cong BC'$.
- Točka B je v notranjosti kota $\angle ACC'$, od koder sledi, da je $\angle BCC' < \angle ACC'$.
- Trikotnik $\triangle C'CB$ je enakokrak, od koder sledi $\angle AC'C \cong \angle BCC'$.
- V trikotniku $\triangle AC'C$ je torej $\angle AC'C < \angle ACC'$ in zato je $AC < AC'$.
- Ker je $AC' \cong AB + BC$, je $AC < AB + BC$.

□

- (10) Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ trikotnika v nevtralni ravnini, za katera je $AB \cong A'B'$ in $AC \cong A'C'$. Pokaži, da je potem

$$\angle BAC > \angle B'A'C' \iff BC > B'C'.$$

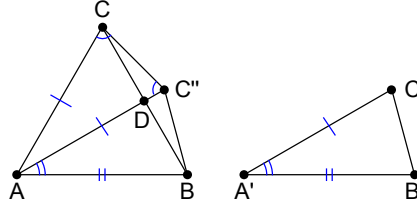
Rešitev: Imamo trikotnika v nevtralni ravnini, ki imata skladna dva para stranic. Pokazali bomo, da je potem kot med tema stranicama večji pri tistem trikotniku, ki ima nasproti daljšo stranico in obratno.



($\Rightarrow$) Recimo, da je $\angle BAC > \angle B'A'C'$. Izberimo točko C'' v notranjosti kota $\angle BAC$, tako da bo veljalo $\angle BAC'' \cong \angle B'A'C'$ in $AC'' \cong A'C'$. Po predpostavki naloge je tudi $AB \cong A'B'$, zato sta po kriteriju SKS trikotnika $\triangle ABC''$ in $\triangle A'B'C'$ skladna. Poleg tega iz $AC'' \cong AC$ sledi, da je trikotnik $\triangle AC''C$ enakokrak in je zato $\angle AC''C \cong \angle ACC''$.

Ker je točka C'' v notranjosti kota $\angle BAC$, poltrak $\overrightarrow{AC''}$ seka daljico BC v točki, ki jo bomo označili z D . Glede na lego točke D ločimo tri možnosti.

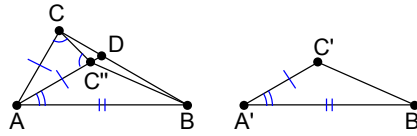
(1) $A * D * C''$:



Ker je A v notranjosti kota $\angle BC''C$, je $\angle BC''C > \angle AC''C$ in tudi $\angle BC''C > \angle ACC''$. Podobno iz dejstva, da je B v notranjosti kota $\angle ACC''$ sledi, da je $\angle ACC'' > \angle BCC''$. V trikotniku $\triangle BC''C$ je torej $\angle BC''C > \angle BCC''$, zato je po izreku s predavanj $BC > BC''$ in posledično $BC > B'C'$.

(2) $D = C''$: V tem primeru je $BC'' + C''C \cong BC$ in zato iz $BC'' \cong B'C'$ sledi $BC > BC'$.

(3) $A * C'' * D$:



Tokrat je točka D v notranjosti kota $\angle BC''C$, zato je $\angle BC''C > \angle DC''C$. Kot $\angle DC''C$ je zunanji kot v trikotniku $\triangle AC''C$, od koder sledi $\angle DC''C > \angle ACC''$. Ker je trikotnik $\triangle AC''C$ enakokrak, je posledično $\angle ACC'' \cong \angle AC''C$. Kot $\angle AC''C$ pa je zunanji kot v trikotniku $\triangle C''DC$, od koder dobimo še $\angle AC''C > \angle C''CB$. Tako smo prišli do neenakosti

$$\angle BC''C > \angle DC''C > \angle ACC'' \cong \angle AC''C > \angle C''CB.$$

V trikotniku $\triangle BC''C$ torej velja $BC > BC'' \cong B'C'$, kar smo želeli pokazati.

($\Leftarrow$) Recimo sedaj, da je $BC > B'C'$. Po izreku o trihotomiji imamo tri možnosti:

(1) $\angle BAC > \angle B'A'C'$,

(2) $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$,

(3) $\angle BAC < \angle B'A'C'$.

Če bi bilo $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, bi bila po kriteriju SKS trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ skladna. Posledično bi bilo $BC \cong B'C'$, kar pa je v protislovju s predpostavko $BC > B'C'$.

Če bi bilo $\angle BAC < \angle B'A'C'$, pa bi po pravkar dokazanem od tod sledilo $BC < B'C'$, kar nas spet pripelje v protislovje s predpostavko.

Tako nam ostane samo še možnost $\angle BAC > \angle B'A'C'$, ki smo jo želeli dokazati. $\square$

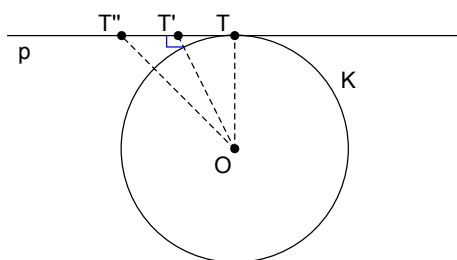
- (11) Naj bosta p premica in K krožnica v nevtralni ravnini, ki se sekata v točki T . Pokaži, da je p tangentna na K natanko takrat, ko je p pravokotna na premico $\overleftrightarrow{OT}$, kjer je O središče krožnice K .

Rešitev: Začnimo z definicijama krožnice in tangente v nevtralni ravnini.

Definicija. Krožnica s središčem O in polmerom OA v nevtralni ravnini je množica vseh točk B , za katere je $OB \cong OA$.

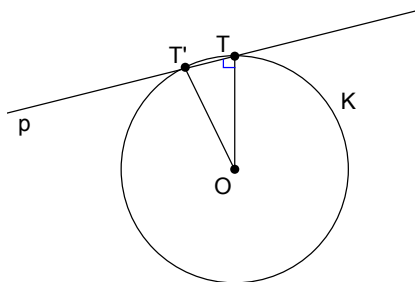
Definicija. Premica p je tangenta na krožnico K v nevtralni ravnini, če se p in K sekata v natanko eni točki.

($\Rightarrow$) Naj bo p premica, ki seka krožnico K v natanko eni točki T in recimo, da p ni pravokotna na $\overleftrightarrow{OT}$.



- S predavanj vemo, da lahko točko O pravokotno projiciramo na premico p . Njeno projekcijo označimo s T' . Ker p ni pravokotna na $\overleftrightarrow{OT}$, je $T' \neq T$.
- Izberimo točko T'' na premici p tako, da bo $T'T \cong T'T''$ in $T'' \neq T$.
- Po kriteriju SKS je $\triangle T''T'O \cong \triangle TT'O$, od koder sledi $OT \cong OT''$.
- Od tod sledi, da točka T'' leži na K , kar pa je v protislovju s tangentnostjo p na K .

($\Leftarrow$) Predpostavimo sedaj, da p seka krožnico K v točki T in da je p pravokotna na $\overleftrightarrow{OT}$. Recimo, da p seka krožnico K še v točki T' , $T' \neq T$.



- Ker je $OT \cong OT'$, je trikotnik $\triangle OTT'$ enakokrak z vrhom pri O .
- Po izreku s predavanj od tod sledi, da je $\angle OT'T \cong \angle OTT'$.
- Trikotnik $\triangle OTT'$ tako vsebuje dva prava kota, zato je vsota njegovih notranjih kotov večja od π . To pa nas pripelje v protislovje z izrekom, ki pravi, da je vsota notranjih kotov v trikotniku v nevtralni ravnini največ π .

□

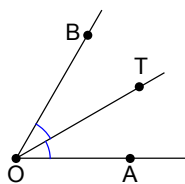
(12) Dokaži naslednje trditve v nevtralni ravnini:

- (a) Vsak kot ima enolično določeno simetralo kota.
- (b) Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v isti točki.
- (c) Vsak trikotnik ima včrtano krožnico.

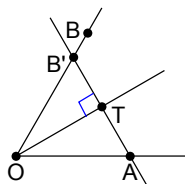
Rešitev: Začnimo z definicijo simetrale kota v nevtralni ravnini. Po naši definiciji je simetrala kota poltrak, pogosto pa simetralo enačimo s premico, ki vsebuje dani poltrak.

Definicija. Simetrala kota $\angle AOB$ v nevtralni ravnini je poltrak $\overrightarrow{OT}$, ki zadošča pogojem:

- T je v notranjosti kota $\angle AOB$.
- $\angle AOT \cong \angle BOT$.



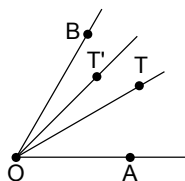
(a) Obstoj simetrale kota:



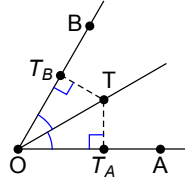
- Izberimo točko B' na poltraku $\overrightarrow{OB}$, da bo $OA \cong OB'$.
- Označimo s T pravokotno projekcijo točke O na premico $\overleftrightarrow{AB'}$.
- Trikotnik $\triangle OAB'$ je enakokrak, od koder sledi, da sta $\angle OAB' \cong \angle OB'A$ ostra kota.
- Če bi točka T ležala izven daljice AB' , bi bil v trikotniku $\triangle OB'T$ oziroma $\triangle OAT$ zunanji kot pri B' oziroma A manjši kot pravi kot pri T . Od tod sledi, da leži točka T v notranjosti daljice AB' .
- Za trikotnika $\triangle AOT$ in $\triangle B'OT$ velja $\angle OTA \cong \angle OTB'$ in $\angle OAT \cong \angle OB'T$. Torej imata skladna dva para kotov in skupno stranico OT . Zato sta po kriteriju *KKS* skladna. Od tod pa sledi $\angle AOT \cong \angle B'OT$.

Enoličnost simetrale kota:

Recimo, da imamo dve različni simetrali $\overrightarrow{OT}$ in $\overrightarrow{OT'}$ kota $\angle AOB$ in da na primer velja $\angle AOT' > \angle AOT$. Od tod po eni strani sledi $\angle BOT > \angle BOT'$. Po drugi strani pa je $\angle BOT' \cong \angle AOT' > \angle AOT \cong \angle BOT$, kar nas pripelje v protislovje.

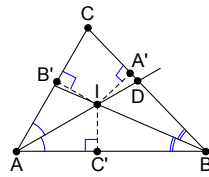


Opomba: Vsaka točka T na simetrali kota $\angle OAB$ je enako oddaljena od krakov kota, v smislu, da je $TT_A \cong TT_B$, kjer sta T_A in T_B njeni pravokotni projekciji na $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$.



Za točko v notranjosti kota $\angle OAB$ je pogoj $TT_A \cong TT_B$ tudi zadosten pogoj, da leži na simetrali kota.

(b) Simetrale notranjih kotov trikotnika se sekajo v isti točki:

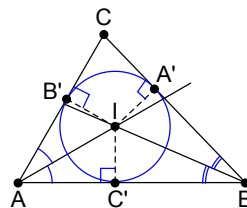


- Označimo z $s_{\angle BAC}$ in $s_{\angle ABC}$ simetrali kotov $\angle BAC$ in $\angle ABC$.
- Po izreku o prečnici obstaja točka $D = s_{\angle BAC} \cap BC$.
- Prav tako po izreku o prečnici za trikotnik $\triangle ABD$ obstaja točka $I = s_{\angle ABC} \cap AD$.
- Ker je točka I v notranjosti kotov $\angle BAC$ in $\angle ABC$, je tudi v notranjosti kota $\angle BCA$.
- Pravokotne projekcije točke I na stranice AB , BC in AC trikotnika $\triangle ABC$ označimo zapored s C' , A' in B' .
- Ker je $I \in s_{\angle BAC} \cap s_{\angle ABC}$, je $IB' \cong IC'$ in $IC' \cong IA'$.
- Ker je skladnost daljic ekvivalenčna relacija, je posledično $IA' \cong IB'$, od koder pa sledi, da I leži na simetrali kota $\angle BCA$.

(c) Sedaj bomo pokazali, da ima vsak trikotnik v nevtralni ravnini včrtano krožnico.

Definicija. Včrtana krožnica trikotnika $\triangle ABC$ v nevtralni ravnini je krožnica, ki ima vse tri stranice trikotnika za tangente. Natančneje to pomeni, da so nosilke stranic tangente, dotikališča pa ležijo v notranjosti stranic.

Vzemimo krožnico s središčem I in s polmerom IA' . Ker je $IA' \cong IB' \cong IC'$, ta krožnica vsebuje točke A' , B' in C' . Po definiciji pravokotne projekcije je $\overrightarrow{IA'} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IB'} \perp \overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{IC'} \perp \overrightarrow{AB}$, od koder pa po nalogi (11) sledi, da so stranice trikotnika tangentne na to krožnico.



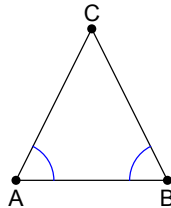
□

(13) Dokaži naslednji trditvi v nevtralni ravnini:

- (a) Nad poljubno daljico AB lahko konstruiramo enakokrak trikotnik z osnovnico AB .
- (b) Vsaka daljica ima enolično določeno simetralo daljice.

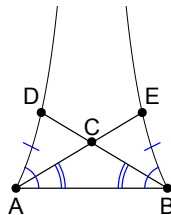
Rešitev: (a) Izberimo poljubno daljico AB in na istem bregu premice $\overleftrightarrow{AB}$ v obeh krajiščih odmerimo skladna kota, ki sta manjša od pravega kota. Lahko se zgodi dvoje:

(1) Kraka kotov se sekata:



Recimo, da se kraka kotov sekata v točki C . Potem ima trikotnik $\triangle ABC$ skladna kota $\angle BAC \cong \angle ABC$, zato je po nalogi (8) enakokrak. Ta možnost se zgodi zmeraj v evklidski ravnini in včasih v hiperbolični ravnini.

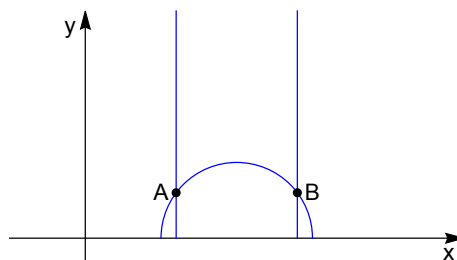
(2) Kraka kotov se ne sekata:



Recimo sedaj, da se kraka kotov ne sekata.

- Izberimo točki D in E na obeh krakih, da bo $AD \cong BE$.
- Ker se kraka ne sekata, je poltrak $\overrightarrow{AE}$ v notranjosti kota $\angle BAD$, poltrak $\overrightarrow{BD}$ pa v notranjosti kota $\angle ABE$.
- Po izreku o prečnici se daljici AE in BD sekata v točki, ki jo označimo s C .
- Po kriteriju SKS sta trikotnika $\triangle ABE$ in $\triangle BAD$ skladna, kar pa pomeni, da je $\angle BAE \cong \angle ABD$ in posledično $\angle BAC \cong \angle ABC$.
- Podobno kot prej od tod sledi, da je trikotnik $\triangle ABC$ enakokrak z vrhom pri C .

Opomba: V hiperbolični ravnini obstajajo primeri, ko se tako konstruirana kraka ne sekata.



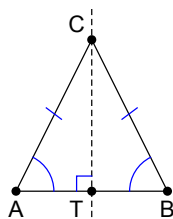
V hiperbolični ravnini za dano daljico obstaja mejni kot, pri katerem se kraka ravno še ne sekata, se pa sekata za vse manjše kote. Temu mejnemu kotu rečemo kot vzporednosti. Daljša kot je daljica, manjši je kot vzporednosti.

(b) Sedaj bomo pokazali, da ima vsaka daljica v nevtralni ravnini enolično določeno simetralo.

Definicija. *Simetrala daljice AB v nevtralni ravnini je premica s_{AB} , za katero velja:*

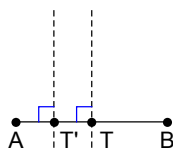
- *simetrala s_{AB} seka daljico AB v točki T , za katero je $TA \cong TB$.*
- *$s_{AB} \perp \overleftrightarrow{AB}$.*

Obstoj simetrale daljice:



- Izberimo enakokrak trikotnik $\triangle ABC$, ki ima AB za osnovnico.
- Označimo s T pravokotno projekcijo točke C na daljico AB .
- Po definiciji seka premica $\overleftrightarrow{CT}$ daljico AB pravokotno.
- Za trikotnika $\triangle ACT$ in $\triangle BCT$ velja $\angle TAC \cong \angle TBC$, $\angle ATC \cong \angle BTC$, imata pa tudi skupno stranico CT . Po kriteriju KKS je zato $\triangle ACT \cong \triangle BCT$, od koder sledi $AT \cong BT$.

Enoličnost simetrale daljice:



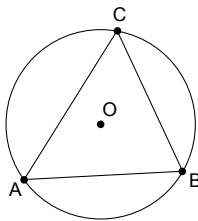
- Recimo, da obstaja še ena premica, ki seka daljico AB pravokotno v točki $T' \neq T$, tako da velja $T'A \cong T'B$.
- Točka T' leži bodisi na daljici AT ali pa na daljici BT .
- Če je $A * T' * T$, je $AT' < AT \cong BT < BT'$, kar nas pripelje v protislovje. Podobno lahko sklepamo tudi v primeru $T * T' * B$.

Opomba: Vsaka točka T na simetrali s_{AB} daljice AB je enako oddaljena od točk A in B v smislu, da je $TA \cong TB$. Po drugi strani pa je pogoj $TA \cong TB$ tudi zadosten pogoj, da leži točka T na simetrali daljice AB . $\square$

- (14) (a) Pokaži, da ima trikotnik v nevtralni ravnini očrtano krožnico natanko takrat, ko se simetrale njegovih stranic sekajo v isti točki.
- (b) Pokaži, da ima vsak trikotnik v evklidski ravnini očrtano krožnico. Nato poišči primer trikotnika v nevtralni ravnini, ki nima očrtane krožnice.

Rešitev: (a) Začnimo z definicijo očrtane krožnice trikotnika v nevtralni ravnini.

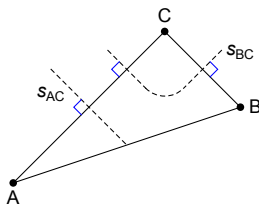
Definicija. Očrtana krožnica trikotnika $\triangle ABC$ v nevtralni ravnini je krožnica, ki vsebuje vsa njegova oglišča.



($\Rightarrow$) Recimo, da točke A , B in C ležijo na krožnici s središčem O in s polmerom OA . Ker je $OA \cong OB$, leži točka O na simetrali s_{AB} . Podobno lahko iz $OA \cong OC$ in $OB \cong OC$ sklepamo še, da leži točka O na simetralah s_{AC} in s_{BC} . Torej se vse tri simetrale stranic trikotnika $\triangle ABC$ sekajo v točki O .

($\Leftarrow$) Recimo sedaj, da se simetrale stranic s_{AB} , s_{AC} in s_{BC} sekajo v točki O . Ker leži točka O na simetrali s_{AB} , je $OA \cong OB$. Podobno pa iz $O \in s_{AC}$ sledi še $OA \cong OC$, kar pomeni, da ležijo točke A , B in C na krožnici s središčem v točki O in s polmerom OA .

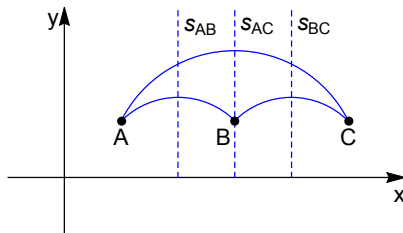
(b) Vsak trikotnik v evklidski ravnini ima očrtano krožnico:



- Recimo, da se simetrali s_{AC} in s_{BC} ne sekata, oziroma, da sta vzporedni.
- Ker je vzporednost premic v evklidski ravnini ekvivalenčna relacija, seka simetrala s_{BC} premico $\overleftrightarrow{AC}$. Iz Evklidovega aksioma o vzporednosti nato sledi, da je $s_{BC} \perp \overleftrightarrow{AC}$.
- Simetrala s_{BC} torej seka premici $\overleftrightarrow{AC}$ in $\overleftrightarrow{BC}$ pravokotno, od koder pa sledi, da sta $\overleftrightarrow{AC}$ in $\overleftrightarrow{BC}$ vzporedni. To pa je v protislovju s predpostavko, da se sekata v točki C .

Primer trikotnika v hiperbolični ravnini, ki nima očrtane krožnice:

Na spodnji sliki je primer trikotnika v hiperbolični ravnini, katerega simetrale stranic so vzporedne. Posledično ta trikotnik nima očrtane krožnice.



□

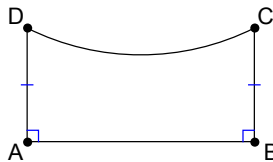
(15) Naj bo $ABCD$ Saccherijev štirikotnik v nevtralni ravnini.

- (a) Pokaži, da je $\angle ADC \cong \angle BCD$.
 (b) Označimo z E in F razpolovišči stranic AB in CD . Pokaži, da premica $\overleftrightarrow{EF}$ seka premici $\overleftrightarrow{AB}$ in $\overleftrightarrow{CD}$ pravokotno.

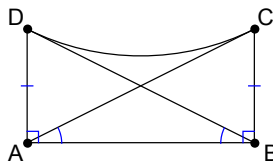
Rešitev: Začnimo z definicijo Saccherijevega štirikotnika.

Definicija. Saccherijev štirikotnik v nevtralni ravnini je štirikotnik $ABCD$, ki zadošča naslednjim pogojem:

- Oglišči C in D ležita na istem bregu premice $\overleftrightarrow{AB}$.
- Premici $\overleftrightarrow{AD}$ in $\overleftrightarrow{BC}$ sta pravokotni na premico $\overleftrightarrow{AB}$.
- $AD \cong BC$.

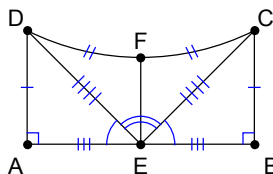


(a) V evklidski ravnini so Saccherijevi štirikotniki natanko pravokotniki. V nevtralni ravnini pa lahko v splošnem dokažemo samo, da sta kota pri ogliščih C in D skladna.



- Po kriteriju SKS je $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. Zato je $AC \cong BD$ in $\angle BAC \cong \angle ABD$.
- Ker sta komplementarna kota skladnih kotov skladna, je $\angle CBD \cong \angle DAC$.
- Po kriteriju SKS je sedaj $\triangle CBD \cong \triangle DAC$ in posledično $\angle ADC \cong \angle BCD$.

(b) Sedaj bomo pokazali, da je zveznica med točkama E in F pravokotna na obe stranici.



- Po kriteriju SKS je $\triangle EAD \cong \triangle EBC$, od koder sledi $ED \cong EC$.
- Po kriteriju SSS je $\triangle CFE \cong \triangle DFE$. Od tod dobimo $\angle CFE \cong \angle DFE$, kar pomeni, da sta $\angle CFE$ in $\angle DFE$ prava kota.
- Poleg tega je $\angle BEF \cong \angle AEF$, zato sta tudi ta dva kota prava.

□