

TGP, 2021/22
3. VAJE : 20.10.2021

1. Naj S_3 deluje nase s konjugiranjem. Določi stabilizatorje in množice fiksni točk.
2. Pokaži, da ima vsako delovanje končne grupe na drevesu globalno fiksno točko (vozlišče ali povezavo na katero vsi elementi grupe delujejo trivialno).
 - Poišči minimalno poddrevo T , ki je zaprto za delovanje grupe G . (Oglej si orbito vozlišča in poti med vozlišči v orbiti.)
 - Pokaži, da G deluje tranzitivno na tako drevo.
 - Oglej si center drevesa ali določi red vozlišč.

3. Naj $\mathbb{Z}$ deluje na $\text{Cay}(F\{a, b\}, \{a, b\})$ z levo translacijo s potenco generatorja a . Skiciraj kakšno vpeto drevo delovanja.

Naj $\mathbb{Z}_4$ deluje na $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, (1, 0), (0, 1))$, tako da $1 \in \mathbb{Z}_4$ "zavrti" graf okoli $(0, 0)$ za 90 stopinj v levo. Skiciraj kakšno vpeto drevo delovanja.

4. Naj bo G končno generirana grupa in $n \in \mathbb{N}$. Pokaži, da je

$$W = \{H \leq G \mid [G : H] = n\}$$

končna množica. Pokaži, da je $\bigcap_{H \in W} H$ edinka končnega indeksa.

- Konstruiraj delovanje grupe G na $\{1, 2, \dots, n\}$. Zapiši podgrupo H kot stabilizator. Oцени število različnih delovanj grupe G na $\{1, 2, \dots, n\}$.
- $[G, H] = [G, gHg^{-1}]$ ($hG \mapsto ghg^{-1}(gHg^{-1})$), $[G : H_1 \cap H_2] \leq [G : H_1][G : H_2]$

- (5.) Naj bo

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem je $F = \langle a, b \rangle \leq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ prosta podgrupa končnega indeksa. Pokaži, da je

$$[\text{SL}_2(\mathbb{Z}), F] = 12.$$

- Pokaži, da je

$$F = \left\{ A = \begin{bmatrix} 4m+1 & 2r \\ 2s & 4n+1 \end{bmatrix} \mid m, n, r, s \in \mathbb{Z}, \det(A) = 1 \right\}$$

- Naj bo

$$G = \left\{ B = \begin{bmatrix} 2m+1 & 2r \\ 2s & 2n+1 \end{bmatrix} \mid m, n, r, s \in \mathbb{Z}, \det(A) = 1 \right\}$$

- $[G, F] = 2$ (G je jedro $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$), $[\text{SL}_2(\mathbb{Z}), G] = 6$.