

Funkcije več spremenljivk

Gradient in smerni odvod

1. Izračunaj kot med gradientoma funkcije $f(x, y) = \ln \frac{x}{y}$ v točkah $(-1, -1)$ in $(1, 1)$.

Rešitev: π

2. V katerih točkah je gradient funkcije

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

- (a) pravokoten na z -os,
- (b) enak 0.

Rešitev:

- (a) $\{(x, y, z) : z^2 = xy\}$
- (b) $\{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$

3. Izračunaj smerni odvod funkcije $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ v točki $(2, 0)$ v smeri krajevnega vektorja te točke.

Rešitev: $\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(2, 0) = 1$

4. Izračunaj smerni odvod funkcije $f(x, y) = \arctan(xy)$ v točki $(1, 1)$ v smeri simetrale prvega kvadranta.

Rešitev: $\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Linearni približki in diferenciability

5. S pomočjo diferenciala izračunaj približke vrednosti

- (a) $\sqrt{4.05^2 + 2.93^2}$
- (b) $0.97e^{0.02}$

Rešitev:

- (a) 4.998
- (b) 0.990

6. Izračunaj totalni diferencial funkcije $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$.

Rešitev: $df = -\frac{y^2}{(x-y)^2}dx + \frac{x^2}{(x-y)^2}dy$

7. Za naslednje funkcije izračunajte linearno aproksimacijo v dani točki.

- (a) $f(x, y) = x^2 + y$ v $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
- (b) $f(r, \varphi) = r \cos \varphi$ v $(1, \pi)$

Rešitev:

- (a) $\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{16}$
- (b) $-r$

8. Pokaži, da funkcija $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ni diferenciable v točki $(0, 0)$.

Rešitev: Ker ne obstaja parcialni odvod v točki $(0, 0)$, funkcija ne more biti diferenciable.

9. Naj bo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ a & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Določi a tako, da bo f zvezna v $(0, 0)$.
- (b) Izračunaj parcialne odvode, kjer obstajajo.
- (c) Ali je f v izhodišču parcialno odvedljiva?
- (d) Ali je f v izhodišču diferenciable?
- (e) Ali je f v izhodišču zvezno parcialno odvedljiva?

Rešitev:

- (a) $a = 0$
- (b) Za $(x, y) \neq (0, 0)$ velja $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
Sicer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
- (c) Da.
- (d) Ne.
- (e) Ne, sicer bi bila tudi diferenciable.

10. Naj bo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Ali je f zvezna?
- (b) Ali je f parcialno odvedljiva?
- (c) Ali je f v izhodišču diferenciable?
- (d) Izračunaj parcialne odvode drugega reda funkcije f v izhodišču.
- (e) Ali je f v izhodišču zvezno parcialno odvedljiva?

Rešitev:

- (a) Da.
- (b) Da.
- (c) Da.
- (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.
- (e) Ne. Mešana odvoda nista enaka, zato nista zvezna.