

Naloga: Pokaži, da za infinitezimalno rotacijo okoli $d\phi$ vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ transformira kot

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) = [\mathbb{1} - i(\mathbf{l} + \mathbf{s}) \cdot d\phi] \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

kjer je $\mathbf{R} \in SO(3)$.

Vemo že, da za infinitezimalno rotacijo $\mathbf{R}$ velja $\mathbf{R} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} = \mathbf{r} + d\phi \times \mathbf{r}$, za poljuben vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Očitno je, da inverzna rotacija $\mathbf{R}^{-1}$ le spremeni predznak pred vektorskim produktom, saj rotiramo v drugo smer. Do istega lahko pridemo tudi preko dejstva, da velja $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, generatorji grupe $SO(3)$ pa so antisimetrični. Sledi

$$\mathbf{R}\mathbf{A}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r} - d\phi \times \mathbf{r}) + d\phi \times \mathbf{A}(\mathbf{r} - d\phi \times \mathbf{r}).$$

Razvijemo do prvega reda v $d\phi$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} - d\phi \times \mathbf{r}) + d\phi \times \mathbf{A}(\mathbf{r} - d\phi \times \mathbf{r}) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}) - D_{\mathbf{r}}\mathbf{A} \cdot (d\phi \times \mathbf{r}) + d\phi \times \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

kjer $D_{\mathbf{r}}\mathbf{A}$ označuje Jacobian evaluiran v $\mathbf{r}$.

Torej

$$\begin{aligned} A'_i &= A_i + \partial_j A_i (d\phi \times \mathbf{r})_j + (d\phi \times \mathbf{A})_i \\ &= A_i + \partial_j A_i \varepsilon_{jkl} d\phi_k r_l + \varepsilon_{ikn} d\phi_k A_n \\ &= [\delta_{in} + \delta_{in} \varepsilon_{jkl} d\phi_k r_l \partial_j + \varepsilon_{ikn} d\phi_k] A_n \\ &= [\delta_{in} + (\delta_{in} \varepsilon_{jkl} r_l \partial_j + \varepsilon_{ikn}) d\phi_k] A_n \\ &= [\delta_{in} - i(\delta_{in} \varepsilon_{jkl} r_l \partial_j - i\varepsilon_{ink}) d\phi_k] A_n. \end{aligned}$$

Definiramo $(X_k)_{in} := -i\varepsilon_{ink}$ in $(l_k)_{in} := i\delta_{in} \varepsilon_{jkl} r_l \partial_j$, tako da velja

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbb{1} - i(\mathbf{l} + \mathbf{X}) \cdot d\phi] \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (0.1)$$

V definiciji $(X_k)_{in} := -i\varepsilon_{ink}$ prepoznamo generatorje grupe $SO(3)$ v adjungirani upodobitvi. Oglejmo si jih eksplicitno;

$$\begin{aligned} X_1 &= -i\varepsilon_{312} - i\varepsilon_{132} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Preverimo še, ali dobimo tudi pravilen rezultat za $X^2 := X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Če diagonaliziramo X_3 dobimo lastne vrednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ in $\lambda_3 = -1$ s pripadajočimi lastnimi vektorji $v_1 \propto (-i, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ in $v_3 \propto (i, 1, 0)$, torej je prehodna matrika enaka

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

ostala dva generatorja pa se v tej bazi izrazita kot $\tilde{X}_{1,2} = P^\dagger X_{1,2} P$;

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \frac{i\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{X}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tukaj je očitno prišlo do algebraične napake, saj se rezultati ne ujemajo z izračunanimi J_i na vajah, tudi če jih pomnožimo z $-i$. Vzrok se še išče.

Komentar: za P lahko izberemo

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

da reproduciramo J_i .