

15) DOKAŽI, DA ZA $n, m \in \mathbb{N}$ IN $j \in \{0, 1, 2, \dots, m+n\}$

VELJA VANDERMONDOVA ENAKOST:

$$\binom{n+m}{j} = \sum_{i=0}^j \binom{m}{i} \binom{n}{j-i}$$

OGLEDNO SI NEKAJ UVODNIH PRIMEROV:

$n=m=1$: $j \in \{0, 1, 2\}$

$$j=0: \binom{2}{0} = \sum_{i=0}^0 \binom{1}{i} \binom{1}{0-i} = \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0} = 1 \cdot 1 \quad \checkmark$$

$\parallel$
1

$$j=1: \binom{2}{1} = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \binom{1}{1-i} = \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{1} + \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{0}$$

$\parallel$
2

$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \quad \checkmark$$

$$j=2: \binom{2}{2} = \sum_{i=0}^2 \binom{1}{i} \binom{1}{2-i} = \binom{1}{0} \binom{1}{2} + \binom{1}{1} \binom{1}{1} + \binom{1}{2} \binom{1}{0}$$

$\parallel$
1

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{KER } \binom{n}{k}=0 \text{ ZA } k>n.}$

$\parallel$
0 0 = 1

$n=2, m=1$: $j \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$j=0: \binom{3}{0} = \binom{1}{0} \cdot \binom{2}{0} = 1 \quad \checkmark$$

$$j=1: \binom{3}{1} = \binom{1}{0} \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \binom{2}{0} =$$

$\parallel$
3

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$j=2: \quad \binom{3}{2} = \binom{1}{0} \binom{2}{2} + \binom{1}{1} \binom{2}{1} + \binom{1}{2} \binom{2}{0}$$

$$\quad \quad \quad = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 =$$

$$\quad \quad \quad = 3 \checkmark$$

$$j=3: \quad \binom{3}{3} = \binom{1}{0} \binom{2}{3} + \binom{1}{1} \binom{2}{2} +$$

$$\quad \quad \quad + \binom{1}{2} \binom{2}{1} + \binom{1}{3} \binom{2}{0}$$

$$\quad \quad \quad = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$

$$\quad \quad \quad = 1 \checkmark$$

D.N. PREVERI $n=1, m=2$.

KAKŠEN NAJ BO INDUKCIJSKI KORAK?

ZA RAZLIK OD STANDARDNIH NAČLOV, IMAMO
TOKRAT DVE NATRANI ŠTEVILI n IN m .

$$(n, m) \xrightarrow{?} (n+1, m+1)$$

TAK KORAK NI DOVOLJ, SAJ ŽE NJIM

TRDITEV POTRDIMO LE ZA PARE, KO $n=m$.

$$(n, m) \rightarrow (n+1, m)$$

$$\quad \quad \rightarrow (n, m+1)$$

MI ŽELIMO, DA SMO POVEČATI
TAKO m KOT n !; NAREDITI
MORAMO DVA KORAKA.

DOKAZIMO! $(n, m) \rightarrow (n+1, m)$

ŽELIMO:
$$\binom{n+m+1}{j} = \sum_{\bar{i}=0}^{\bar{j}} \binom{m}{\bar{i}} \binom{n+1}{\bar{j}-\bar{i}}$$

IMAMO:
$$\binom{n+m}{j} = \sum_{\bar{i}=0}^{\bar{j}} \binom{m}{\bar{i}} \binom{n}{\bar{j}-\bar{i}}$$

IZ PREDSJE NALOGE:

$$\left\{ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right\}$$

$$\sum_{\bar{i}=0}^{\bar{j}} \binom{m}{\bar{i}} \binom{n+1}{\bar{j}-\bar{i}} = \sum_{\bar{i}=0}^{\bar{j}} \binom{m}{\bar{i}} \left[\binom{n}{\bar{j}-\bar{i}} + \binom{n}{\bar{j}-\bar{i}-1} \right] =$$

$$= \left(\sum_{\bar{i}=0}^{\bar{j}} \binom{m}{\bar{i}} \binom{n}{\bar{j}-\bar{i}} \right) + \left(\sum_{\bar{i}=0}^{\bar{j}} \binom{m}{\bar{i}} \binom{n}{\bar{j}-\bar{i}-1} \right) =$$

$$\stackrel{\text{i.p.}}{=} \binom{n+m}{j} + \underbrace{\sum_{\bar{i}=0}^{\bar{j}-1} \binom{m}{\bar{i}} \binom{n}{(\bar{j}-1)-\bar{i}}}_{\substack{\text{ENAKOST ZA } n, m \\ \text{za } \bar{j}-1}} + \binom{m}{j} \underbrace{\binom{n}{-1}}_{=0}$$

$$\stackrel{\text{i.p.}}{=} \binom{n+m}{j} + \binom{n+m}{j-1} \stackrel{\uparrow}{=} \binom{n+m+1}{j} = \binom{(n+1)+m}{j}$$

IDENTITETA
IZ PASCALOVEGA
TRIKOTNIKA OZI
BINOMSKE FORMULE

DOMAČA NALOHA:

DOKAZI KORAK $(n, m) \rightarrow (n, m+1)$.

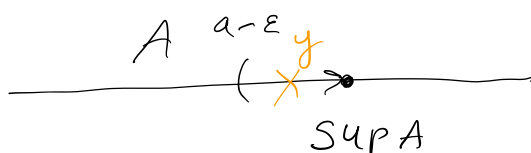
OPOMBA! OBSTAJA TUDI KOMBINATORIKA,
(DOKAZ TE IDENTITETE, KI JE ZELO PREPROST.

t.j. ČE ŽELIMO IZMED $n+m$ ELEMENTOV
IZBRATI j ELEMENTOV, JE TO EKVIVALENTNO
ŠTEVILU MOŽNOSTI, DA IZMED m IZBEREMO
 i ELEMENTOV, IZMED n PA $j-i$
(ZA VSE MOŽNE i).

KONSTRUKCIJA REALNIH ŠTEVIL

NA PREDAVANJIH STE UVEDLI DEFINICIJE ZA
 $\sup / \inf / \max / \min$ MNODIC. SPOMNIMO SE JIH:

~ ŠTEVILO $a \in \mathbb{R}$ JE SUPREMUM ZA $A \subseteq \mathbb{R}$, ČE
ZA VSE $x \in A$ VELJA $a \geq x$ IN JE
 a NAJMANJŠE TAKO ŠTEVILO t.j. ZA $\forall \varepsilon > 0$
OBSTAJA $y \in A$, DA JE $y > a - \varepsilon$.
(SUPREMUM JE NATANČNA ZGORNJA MEJA)



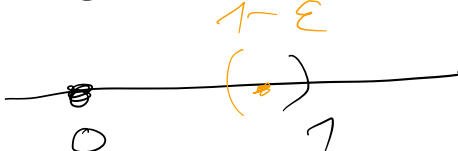
~ NA PODOBEN NAČIN DEFINIRAMO INFIMUM $\inf A$
KOT NATANČNO SPODNJO MEJO.

~ KADAR JE $\sup A \in A$, MU PRAVIMO MAKSIMUM A .

t.j. $a = \max A$, če $a \in A$ in $x \leq a$ za $x \in A$.

~ NA PODOBEN NAČIN DEFINIRAMO MIN A KOT
INFIMUM MNOSTICE A , KI JE TUDI USEBOVAN V NJEJ.

OPOMBA: NI NUJNO, DA TAKA ŠTEVILA
ZA MNOSTICO OBSTAJAJO.

PRIMER: $A = [0, 1)$ 

$$\min A = \inf A = 0$$

$$\sup A = 1$$

$\max A$ NE OBSTAJA

$$B = [0, \infty)$$

$$\min B = \inf B = 0$$

$\sup B$ in $\max B$ NE OBSTAJATA.

① ČE OBSTAJAJO, ZA NASLEDNJE MNOSTICE
DOLOCI $\sup / \max / \inf / \min$:

$$(a) A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(b) B = \left\{ x \in (0, 1) ; \begin{array}{c} x \text{ MA V DECIMALNEM ZAPISU} \\ \text{VSAJ ENO ENKO} \end{array} \right\}$$

$$(c) C_c = \left\{ \frac{1}{1 + e^{cx}} ; x \geq 0 \right\}, c \in \mathbb{R}.$$

(a) ZAPIŠIMO NEKAJ ELEMENTOV MNOSTICE

$$A = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots \right\}$$

SUMIMO: (i) $\max A = \sup A = 2$,

$$(ii) \inf A = 1,$$

(iii) $\min A$ NE OBSTAJA,

KER GRE ZA PADAJOČE ZAPOREDJE,
JE (i) OČITNO.

DOKAZIMO (ii): $\inf A = 1$

DOKAZATI MORAMO DVE STVARI:

~ 1 JE SPODNJA MEJA

~ 1 JE NATANČNA

1 JE SPODNJA MEJA ZA A

$$1 \leq x, x \in A$$

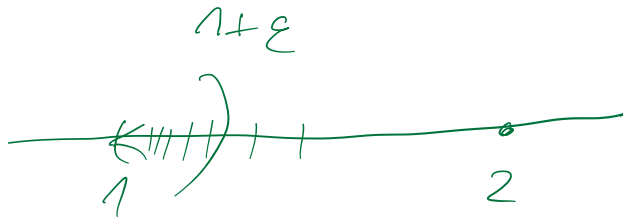
$$1 \leq 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \quad \text{TO JE OČITNO RES.} \quad \checkmark$$

1 JE NATANENA

Izberimo $\varepsilon > 0$. Iščemo $y \in A$, da

BO veljalo $y < 1 + \varepsilon$.



$$y = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

ZA vsak n, k JE VEČJI OD $\frac{1}{\varepsilon}$,

JE TA LASTNOST ZA $1 + \frac{1}{n}$

IZPOLNJEVA.

OČITNO SE DA) SLEDI TUDI $(\hat{x} \hat{x})$,

SAJ $1 \notin A$.

(b) $B = \{x \in (0, 1); \text{ v DEC. ZAPISU IMAMO ENICO}\}$

SUMIMO: (i) $\sup B = 1$

(ii) $\inf B = 0$

(iii) $\min B$ in $\max B$ NE OBSTAJATA.

(i) 1 JE OČITNA ZGORNJA MEJA, SAJ
 $B \subset (0, 1)$. T.j. $x \in B \Rightarrow x \leq 1$.

PO DRUGI STRANI PA JE TUDI

NATANČNA, SAJ ZA $\varepsilon > 0$

LAHKO IZBEREMO

$$1 - \varepsilon < \underbrace{0.999\dots 91}_{\text{ZADOSTNO}} < 1$$

ZADOSTNO
ŠTEVILO DEVETIC

(ii) PODOBNO KOT (i):

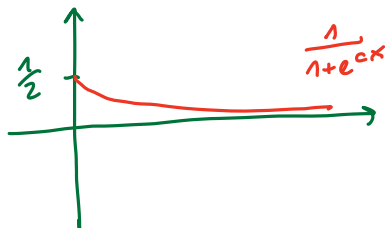
$$0 < 0.0\dots 01 < \varepsilon$$

(iii) OČITNO, SAJ $0, 1 \notin B$.

$$(C) \quad C = \left\{ \frac{1}{1+e^{cx}}; x \geq 0 \right\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

LOŽIMO TRI PRIMERE:

(i) $c > 0$, POTEM GRE $e^{cx} \rightarrow \infty$ ZA $x \rightarrow \infty$.



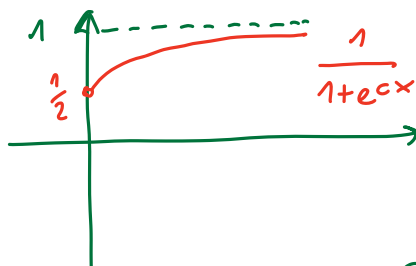
$$C = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\max C = \sup C = \frac{1}{2}$$

$$\inf C = 0$$

$$\min C \text{ ne obstaja}$$

(ii) $c < 0$, POTEM GRE $e^{cx} \rightarrow 0$ ZA $x \rightarrow \infty$.



$$C = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\sup C = 1, \quad \max C \text{ ne obstaja}$$

$$\inf C = \min C = \frac{1}{2}$$

(iii) $c = 0$, POTEM JE $e^{cx} = 1$.

$$C = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\max C = \min C = \sup C = \inf C = \frac{1}{2}.$$

OPOMBA: NAREDIMO LAHKO TUDI DIREKTEN DOKAZ. NPR.

$$\sup C = 1 \quad \text{ZA} \quad c < 0$$

1 JE ZGORNJA MEJA, SAJ VELJA:

$$\frac{1}{1+e^{cx}} \leq 1$$

$$1+e^{cx} \geq 1$$

$$e^{cx} \geq 0 \quad \checkmark$$

1 JE NATANJNA ZGORNJA MEJA. RES, PAJ BO $\varepsilon > 0$,
POTEM LAHKO NAJDEMO TAK $y = \frac{1}{1+e^{cx}} > 1-\varepsilon$.

TO BO VELJALO, ČE BO:

$$1+e^{cx} < \frac{1}{1-\varepsilon} \quad | -1$$

$$e^{cx} < \frac{1}{1-\varepsilon} - 1$$

$$cx < \ln\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1\right) \quad | : c$$

$$x > \frac{1}{c} \ln\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1\right)$$

NEGATIVNO
ŠTEVILLO

$$(2) A, B \subseteq \mathbb{R}.$$

$$A \pm B = \{ a \pm b \mid a \in A, b \in B \}$$

PRIMER:

$$A = \{1, 3\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$\begin{aligned} A+B &= \{1+2, 1+4, 1+6, 3+2, 3+4, 3+6\} \\ &= \{3, 5, \cancel{7}, \cancel{5}, 7, 9\} \\ &= \{3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

$$\sim A = \mathbb{N}$$

$$B = \mathbb{Z}$$

$$A+B = \{ a+b; a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}$$

ČE OBSTAJAJO VSI USTREZNI $\inf$ IN $\sup$,
POKAŽI, DA VELJA:

$$(a) \sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

$$(b) \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

$$(c) \sup(A-B) = \sup A - \inf B$$

$$(d) \inf(A-B) = \inf A - \sup B$$

(a)

MI ŽELIMO DOKAZATI, DA JE $\sup A + \sup B$ SUPREMUM ZA MNOŽICO $A+B$.

(i) $\sup A + \sup B$ JE ŽG. MEJA ZA $A+B$

+ j. $c \in A+B \Rightarrow c \leq \sup A + \sup B$

ČE JE $c \in A+B$, POTEM JE OBLIKE

$c = a+b$ ZA NEK $a \in A$ IN $b \in B$.

PO DRUGI STRANI PA VEMO, DA

STA $\sup A$ IN $\sup B$ ŽG. MEJ

ZA A IN B :

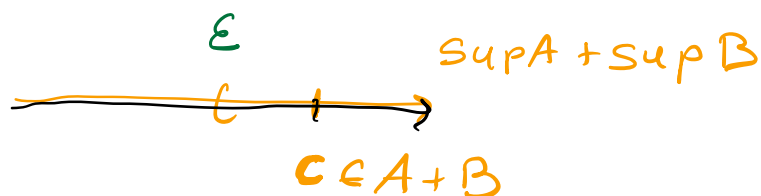
$$\begin{aligned} & a \leq \sup A, \quad \forall a \in A, \\ + & b \leq \sup B, \quad \forall b \in B. \end{aligned}$$

$$c = a+b \leq \sup A + \sup B \quad \checkmark$$

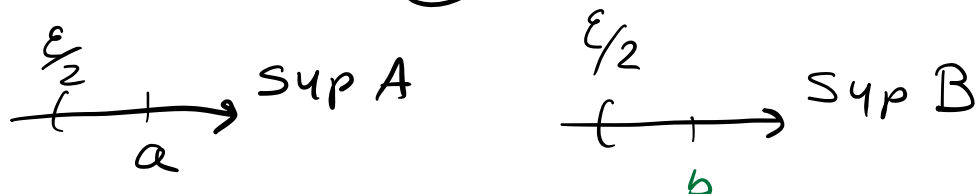
(ii) $\sup A + \sup B$ JE NATANČNA MEJA

t.j. ZA $\forall \varepsilon > 0$ OBSTAJA $c \in A+B$,

DA JE $\sup A + \sup B - \varepsilon < c$.



IDEJA: $\nearrow \oplus \nwarrow$



KER STA $\sup A$ IN $\sup B$ NATANENI
MEJI ZA A OZ. B , OBSTAJATA

$$a \in A: \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a$$

$$b \in B: \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b$$

$$\Rightarrow \sup A + \sup B - \varepsilon < \underbrace{a+b}_{\substack{= \\ c}} \in A+B$$

(b) PODOBNO KOT (a).
REŠI DOMA!

$$(c) \underline{\sup(A-B)} = \sup A - \inf B.$$

DOKAŽIMO NAJPREJ, DA VELJA:

$$\boxed{\sup(-B) = -\inf B} \quad \text{ⓧ}$$

SPET MORAMO DOKAZATI DVE TOČKI:

(i) $-\inf B$ JE ŽG. MEJA ZA $-B$.

(ii) $-\inf B$ JE NATANENA.

(i) NAS BO $c \in -B$, ŽELIMO
VIDETI, DA JE $c \leq -\inf B$.

ČE JE $c \in -B$, JE OBLIKE $c = -b$
ZA NEK $b \in B$. KER JE $\inf B$
SPODNJA MEJA, VELJA:

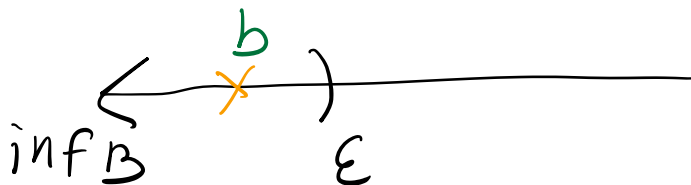
$$b \geq \inf B \quad / \cdot (-1)$$

$$c = -b \leq -\inf B$$

(ii) NAS BO $\varepsilon > 0$. IZEMO
 $c \in -B$, DA BO $-\inf B - \varepsilon < c$.

UPORABIMO DEJSTVO, DA JE $\inf B$
NATAZNA SPODNJA MEJA. TOREJ
ZA $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $b \in B$

$$\inf B + \varepsilon > b$$



MNOŽIMO Z (-1) :

$$-\inf B - \varepsilon < \boxed{-b = c}$$

SEDAJ JE DOKAŽ (c) PREPROST:

$$\sup(A-B) = \sup(A+(-B)) =$$

$$= \sup A + \sup(-B) =$$

$$\uparrow \text{po (a)} = \sup A - \inf B. \quad (*)$$

(d) DOKAŽEMO NA EĽAK
NA $\mathbb{Q}$ A $\mathbb{N}$. NAJPREJ

DOKAŽEMO ZVEZO

$$\inf(-B) = -\sup B$$

POTEM PA VĽA:

$$\inf(A-B) = \inf(A+(-B)) =$$

$$= \inf A + \inf(-B) =$$

$$\uparrow \text{po (b)} = \inf A - \sup B.$$