

KOT SMO OMENILI ZADNJOČ, JE CILJ TEHA RAZDELKA "KONSTRUKCIJA REALNIH ŠTEVIL". KAJ TO POMENI? ZAKENKRAT SMO NA MATEMATIČNO NEOPOREČEN NAČIN DEFINIRALI ZGOLJ MNOSTICO RACIONALNIH ŠTEVIL:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} ; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, D(m,n)=1 \right\}$$

NAŠ NASLEDNJI CILJ JE, DA BOMO Z RACIONALNIMI ŠTEVILI DEFINIRALI TUDI IRACIONALNA t.j. "NEZNANO" MNOSTICO $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ DEFINIRAMO Z "ZNANO" $\mathbb{Q}$.

DEDEKINDOVA IDEJA:

$\mathbb{R}$ JE NAPOLNITEV RACIONALNIH ŠTEVIL Z NATANJNIMI ZGORNJIMI MEJAMI NAVZGOR OMEJENIH MNOSTIC $A \subseteq \mathbb{Q}$.

DEF:

DEDEKINDOV REZ JE MNOSTICA $A \subseteq \mathbb{Q}$, KI ZADOŠČA:

- (i) $A \neq \emptyset$ in $A \neq \mathbb{Q}$
- (ii) OBSTAJA $\sup A$, NE PA TUDI $\max A$
t.j. ZA $q \in A$ OBSTAJA $q' \in A$, DA JE $q < q'$.
- (iii) ČE JE $q \in A$ IN $q' < q$, JE TUDI $q' \in A$.

KOMENTAR:

DEDEKINDOV REZ SI LAHKO PREDSTAVLJAMO KOT

$$A = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q} \quad \text{ZA} \quad a \in \mathbb{R}$$



VENDAR PA S TEM MALCE GOUJFANO, KER SE "NE VEMO", KAJ JE INTERVAL $(-\infty, a)$.

DEDEKINDOVA IDEJA JE, DA $a \in \mathbb{R}$ DEFINIRAMO KOT $a = \sup A$. PRIMER:

$$\sqrt{2} = \sup \{ q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2 \text{ ALI } q < 0 \}$$

t.j. IRACIONALNO ŠTEVILLO SMO PODALI Z "RACIONALNIM OPISOM".

$$\textcircled{3} \quad E = \{ z \in \mathbb{Q} : z < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ ZA NEK } n \in \mathbb{N} \}.$$

POKAŽI, DA JE E DEDEKINDOV REZ
IN UGOTOVI, KATERO ŠTEVILO PODAJA.

DOKAŽIMO ZAHTEVANE LASTNOSTI:

$$\underline{E \neq \emptyset}$$

$$1 \in E, \text{ KER } 1 < 1 + \frac{1}{1!}.$$

$$\underline{E \neq \mathbb{Q}}$$

POIŠČIMO NEKO ZGORNJO MEJO ZA E .

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$2! \geq 2, \quad 3! \geq 2 \cdot 2, \quad 4! \geq 2^3, \quad \dots, \quad n! \geq 2^{n-1}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + 2 = 3$$

UGOTOVILI SMO, DA VELJA:

$$1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 3$$

KER SO $z \in E$ TAKI, KI SO
MANJŠI OD LEVE STRANI $3 \notin E$.

ZA $z \in E$ obstaja $z' \in E$, $z < z'$

KER JE $z \in E$, obstaja $n \in \mathbb{N}$:

$$z < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Izberemo:

$$z' = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \in \mathbb{Q}$$

$$z' < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

+j. obstaja $n+1 \in \mathbb{N}$, da
je izpolnjen potreben pogoj.

Torej je $z' \in E$ in $z < z'$.

ZA $z \in E$ velja, da za $z' \in \mathbb{Q}$
z lastnostjo $z' < z$, velja
tudi, da je $z' \in E$.

$$z < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

NAJ BO $z' < z$ in $z' \in \mathbb{Q}$.

POTEM OČITNO VELJA TUDI

$$z' < 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \Rightarrow z' \in E.$$

SKLEP: DOKAZALI SMO, DA JE
 e DEDEKINDOV REZ.

KER VELJA:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right),$$

PA NAM PODAJA NARAVNO
KONSTANTO $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

SEDAJ, KO SMO KONSTRUIRALI $\mathbb{R}$ -ŠTEVILA
KOT SUP MNOŽIC, LAHKO UVEDAMO TUDI
OPERACIJE:

~ SEŠTEVANJE: DOKAZALI SMO, DA

$$\text{VELJA } \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Torej $a+b$ DEFINIRAMO KOT NATANENO
ZGORNJO MEJO MNOŽICE $A+B$.

~ MNOŽENJE: DA SE IZOGNEVO TEŽAVAM
S PREDZNAKI SE OMEJIMO NA POZITIVNE
REZE, KI VSEBUJEJO 0 . ZA DVA TAKA
REZA DEFINIRAMO PRODUKT MNOŽIC

$$A \cdot B = \{ z \in \mathbb{Q} \mid z < \tilde{a} \cdot \tilde{b} \text{ ZA } \text{POZITIVNA } \tilde{a} \in A, \tilde{b} \in B \}.$$

PRODUKT ŠTEVIL $a = \sup A$ IN $b = \sup B$ JE
DEFINIRAN KOT $\sup(A \cdot B)$.

④ DOKAŽI Z UPORABO DEDEKINDOVITI REZOV:

$$(a) \sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$$

$$(b) \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$\sqrt{2} \approx \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \text{ ALI } x < 0\} = A$$

$$\sqrt{3} \approx \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3 \text{ ALI } x < 0\} = B$$

$$\sqrt{5} \approx \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 5 \text{ ALI } x < 0\} = C$$

ZELIMO DOKAZATI, DA:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5} \text{ t.j.}$$

$$\sup(A+B) \neq \sup C$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} \approx 1,4 \\ \sqrt{3} \approx 1,7 \end{array} \right\} \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,1$$
$$\sqrt{5} \approx 2,1$$

DOKAZALI BOMO, DA VELJA $C \subsetneq A+B$.
KAR JE EKVIVALENTNO $\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

KAKO SE DOKAŽE, DA $C \subseteq A+B$?

(i) $C \subseteq A+B$ t.j. $\forall c \in C \Rightarrow c \in A+B$.

(ii) $C \neq A+B$ t.j. $\exists z \in A+B$, DA $z \notin C$.

ZAČENIMO Z DOKAZOM (i). NAJ BO $c \in C$.

POTEM JE BODISI $c < 0$ BODISI $c^2 < 5$.

ČE JE $c < 0$, SMO KONČALI, SAJ VEMO,

DA GA LAHKO ZAPIŠEMO KOT:

$$c = \underbrace{(\text{cloud})}_A + \underbrace{(0)}_B \in A+B \quad \checkmark$$

A VSEBUJE
NEGATIVNA
ŠTEVILA

NAJ BO Torej $c^2 < 5$ IN $c > 0$. ZAPISATI

GA MORAMO KOT $c = a + b$, KJER JE

$$a^2 < 2 \quad \text{in} \quad b^2 < 3.$$

$$\xrightarrow{c \sqrt{5} C} \quad \xrightarrow{a \sqrt{2}} \quad \xrightarrow{b \sqrt{3}}$$

NPR. VZEMIMO DOBER RACIONALNI PRIBLIŽEK
ŠTEVILA $\sqrt{2}$ ZA a . NA PRIMER:

$$a = \frac{14}{10} \Rightarrow a^2 < 2 \Rightarrow a \in A.$$

POTEM LAHKO ZA b VZAMEMO:

$$b = c - \frac{14}{10} = c - a \in \mathbb{Q}$$

$\bar{c} \in J \in b^2 < 3$, BO TO ISKANI PAR,
 SAJ BO VELJALO, DA $c = a + b$ IN $a \in A, b \in B$.

$$b = c - \frac{14}{10} < \frac{22}{10} - \frac{14}{10} \Rightarrow b^2 < 3.$$

$\uparrow$
 $\sqrt{5} \approx 2,1$

$\Rightarrow b \in B.$

DOKAZIMO SE $(\bar{a}\bar{a}) + \dots$ t.j. $\exists z \in A+B$, DA $z \notin C$.
 LAHKO VZAMEMO NA PRIMER $z = 3$.

$$z = 3 < \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$z = 3 > \sqrt{5}$$

$$(b) \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$A = \{z \in \mathbb{Q} : z^2 < 2 \text{ ali } z < 0\} \approx \sqrt{2}$$

$$B = \{z \in \mathbb{Q} : z < 2\} \approx 2$$

RADI BI DOKAZALI, DA $A \cdot A = B$. ZNOVA
 TO STORIMO V DVEH KORAKIH:

$$(i) A \cdot A \subseteq B \quad \text{t.j.} \quad \forall z \in A \cdot A \Rightarrow z \in B.$$

$$(ii) B \subseteq A \cdot A \quad \text{t.j.} \quad \forall z \in B \Rightarrow z \in A \cdot A.$$

SPOMNIMO:

$$A \cdot A = \{z \in \mathbb{Q} : \exists a \in A \text{ in } b \in A; \text{ DA } z < a \cdot b\}.$$

ZA POZITIVNA a IN b

DOKAŽIMO (i):

NA) BO $q \in A \cdot A$. POTEM $\exists a, b \in A$, DA JE $q < a \cdot b$. IZ TEGA MORAMO DOKAZATI, DA JE $q < 2$, VEMO PA $a^2 < 2$ IN $b^2 < 2$.

NAMIG:

$$a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

DOKAZ: $a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad | \cdot 2$

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 \leq (a - b)^2 \quad \checkmark$$

ČE GA UPORABIMO, DOBIMO:

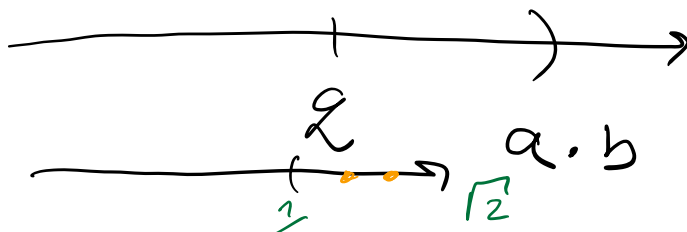
$$q < a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2} < \frac{2 + 2}{2} = 2$$

$$\Rightarrow q \in B.$$

DOKAŽIMO (ii):

NA) BO $q \in B$. POTEM JE $q < 2$, OCENITI PA GA MORAMO S PRODUKCIJO ŠTEVIL IZ A .

2



$$a < \sqrt{2}$$

$$b < \sqrt{2}$$

KER VEMO, DA JE $\mathbb{Q}$ GOSTA, LAHKO
POIŠČEMO RACIONALNO ŠTEVILO a ,
KI JE ZA $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, BLIZU $\sqrt{2}$.

(NPR. VEDNO BOLJ NATAHČEN
DECIMALNI ZAPIS).

ČE JE $a = b$, BO

$$a \cdot b > \left(\sqrt{2} - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$$

↑

ZA DOVOLJ
VELIK $n \in \mathbb{N}$.

⑤ DOKAŽI, DA ZA VSAK REALEN $x > 0$ IN $n \in \mathbb{N}$
OBSTAJA NATANKO ENA REŠITEV $y = \sqrt[n]{x}$, DA
JE $y^n = x$.

NAMIG: DEDEKINDOV AKSIOM: VSAKA NAVZGOR OM. MNŽICA $A \subseteq \mathbb{R}$
IMA NATANČNO ZG. MEJO.

R: TOKRAT IŠČEMO REŠITEV, ZATO SE NASLONIMO NA
DEDEKINDOV AKSIOM. NAJ BO:

$$A = \{z \in \mathbb{R} : z > 0 \text{ in } z^n < x\}$$

A JE NEPRAZNA

NAJ BO $z < 1$. POTEM JE $z^n \leq z$ ZA $n \in \mathbb{N}$.

Torej za $z < \min\{1, x\}$ velja, da je $z \in A$.

A JE NAVZGOR OMEJENA

ČE A NI NAVZGOR OMEJENA, V NJEJ OBSTAJA
TUDI $q > \max\{x, 1\}$. ZANJ VELJA:

$$q^n > q > x$$

TO JE PROTISLOVJE.

KER JE A NEPRAZNA IN NAVZGOR OMEJENA,
PO AKSIOMU OBSTAJA $\sup A =: a$. TRDIMO,
DA TO ŠTEVILO ZADOŠČA $a^n = x$.

DENIMO, DA TO NI RES IN DA JE $a^n < x$.
POTEM OBSTAJA $\varepsilon > 0$, DA JE TUDI $(a + \varepsilon)^n < x$,
VENDAR PA JE TEDAJ $a + \varepsilon \in A$, KAR JE
V NASPROTUJ S PREDPOSTAVKO, DA JE
a SUPREMUM MNOŽICE A.

DELIMO, DA JE $a^n > x$. TEDAJ OBSTAJA
 $\varepsilon > 0$, DA JE TUDI $(a - \varepsilon)^n > x$.

TO PA JE ZNOVA PROTISLOVJE, SAJ BI
POTEM BILA TUDI $a - \varepsilon$ ZGORNJA MEJA
ZA A IN a NE BI BIL SUPREMUM.

