

Števíla

1. Naj bo q neničelno racionalno število, $x > 0$ pa iracionalno število. Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q + x$ in qx tudi iracionalna.
2. Dokaži, da je število $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalno.
3. (a) Dokaži, da je število $\log_{\sqrt{2}} 3$ iracionalno.
(b) Pokaži, da obstajata iracionalni števili x in y , za kateri je število x^y racionalno.

Rešitev: (b) $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$

4. Poišči vse rešitve naslednjih enačb:

(a) $x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 5x + 7$

(b) $\sqrt{13x^2 - 36} = 2x$.

Rešitev:

(a) $x \in \{-1, -6\}$

(b) $x = 2$

5. Določi vsa realna števila x , za katere je izpolnjena neenakost:

(a) $x^2 - 1 > -x - 4x$,

(b) $\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1 > 0$,

(c) $\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1 < 0$.

Rešitev:

(a) $x \in (-\infty, \frac{-5-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{-5+\sqrt{29}}{2}, \infty)$

(b) $x \in (0, \infty)$

(c) $x \in (\frac{4}{3}, \infty)$

6. Za vsako od naslednjih množic določi tista od števil supremum, infimum, maksimum in minimum, ki obstajajo.

(a) $A = \{\frac{2n-1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$,

$$(b) \ B = \left\{ \frac{m-2m^2}{m^2+4} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rešitev:

- (a) $\inf A = \min A = \frac{1}{3}$, $\sup A = 1$, $\max A$ ne obstaja.
 (b) $\sup B = \max B = -\frac{1}{5}$, $\inf B = -2$, $\min B$ ne obstaja.

7. Podana je množica

$$B = \{1 + x^2 : x \in (-1, 3]\}.$$

V primeru, da obstajajo $\min A$, $\max A$, $\inf A$ in $\sup A$, jih določi.

Rešitev: $\inf A = \min A = 1$, $\sup A = \max A = 10$.

Absolutna vrednost

8. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ izračunaj vrednost naslednjega izraza.

- (a) $|x + 2| - |x| - 2$
 (b) $||x + 2| - |x||$

Rešitev:

$$(a) \begin{cases} -4, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2, & x < -2 \\ -2x - 2, & -2 \leq x < -1 \\ 2x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

9. Reši enačbe:

- (a) $|x + 1| = 3$,
 (b) $|x - 1| = |2x + 2|$,
 (c) $||x - 2| - 1| = 2$,
 (d) $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 2$,
 (e) $||x + 2| - 1| = x^2 - x - 2$.

Rešitev:

- (a) $x \in \{-4, 2\}$
 (b) $x \in \{-3, -\frac{1}{3}\}$
 (c) $x \in \{-1, -5\}$
 (d) $x = 1$
 (e) $x \in \{-1, 3\}$

10. Določi tako realno število a , da bosta $x = \frac{1}{2}$ in $x = -\frac{1}{2}$ rešitvi enačbe

$$||ax - 1| - x| = 1.$$

Rešitev: $a = -1$

11. Reši neenačbe:

(a) $|x + 1| < x + 3,$

(b) $|x - 2| \leq |x + 3| + x$

(c) $|x^2 + 4x + 3| < 2,$

(d) $|1 - |x - 1|| < 1.$

Rešitev:

(a) $(-2, \infty)$

(b) $x \in [-\frac{1}{3}, \infty)$

(c) $(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})$

(d) $(-1, 1) \cup (1, 3)$