

LINEARNA ALGEBRA 2021/22

VAJE: vektorska geometrija

Prve vaje

1. Naj bodo $A = (0, 2, 3)$, $B = (4, -2, 1)$ in $C = (8, 1, -3)$.
 - 1.1. Izračunaj vektorje $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$.
 - 1.2. Izračunaj vektorja $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
 - 1.3. Ali sta vektorja $(-6, -8, 7)$ in $(3, -1, 0)$ linearni kombinaciji vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$?
2. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izrazi: $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ in $\overrightarrow{BF}$.
3. V trapezu $ABCD$ velja $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$. Naj bo E razpoložišče roba AD in F presečišče daljic AC in EB . Z $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ izrazi $\overrightarrow{AF}$.
4. V paralelogramu $ABCD$ označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Naj bosta E in F razpoložišči daljic AB in BC ter G in H presečišči daljic DE in DF z AC . Z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izrazi $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{GH}$ in $\overrightarrow{HC}$.
5. V kocki $ABCD A' B' C' D'$ izrazi presečišče trikotnika $AB' D'$ in diagonale $A' C$.
6. Naj bodo A_1, A_2 in A_3 poljubne točke ter a_1, a_2 in a_3 realna števila, za katera velja $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Pokaži, da obstaja natanko ena točka A , za katero velja $a_1 \overrightarrow{AA_1} + a_2 \overrightarrow{AA_2} + a_3 \overrightarrow{AA_3} = \vec{0}$ in $\overrightarrow{BA} = a_1 \overrightarrow{BA_1} + a_2 \overrightarrow{BA_2} + a_3 \overrightarrow{BA_3}$ za katerokoli točko B .
7. Dokaži, da se težišnice trikotnika sekajo v eni točki.

Druge vaje

1. Pokaži, da sta vektorja (x_1, x_2) in (y_1, y_2) linearno odvisna natanko tedaj, ko je $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$.
2. Izračunaj skalarna produkta:
 - a. $\langle \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \rangle$
 - b. $\langle 2\vec{i} + \vec{k}, 2\vec{j} - \vec{k} \rangle$
3. Naj bo $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, -3, 0)$ in $\vec{c} = (-1, 2, 1)$. Določi λ tako, da bosta $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ in $\vec{c}$ pravokotna. Določi μ , da bo imel $\mu \vec{c}$ dolžino 1.
4. Določi kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če velja $\vec{a} + 3\vec{b} \perp 7\vec{a} - 5\vec{b}$ in $\vec{a} - 4\vec{b} \perp 7\vec{a} - 2\vec{b}$.
5. V trikotniku, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izrazi nožišče višine nad stranico, ki jo določa $\vec{a}$.

6. Določi kot med ploskvama v pravilnem tetraedru.
7. Za $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, 0)$ in $\vec{c} = (2, 0, 1)$ izračunaj $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ in $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Tretje vaje

1. Vsoto $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ izrazi z enim vektorskim produktom.
2. Reši enačbo $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{x}$ za linearano neodvisna vektorja $\vec{a}, \vec{b}$. Rešitev podaj parametrično.
3. Naj bo mešani produkt definiran z $[\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$. Pokaži, da je $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$.
4. Izračunaj prostornino paralepipeda določenega z $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (0, 3, -1)$ in $\vec{c} = (3, -2, 4)$.
5. Pokaži, da so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko je $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.
6. Premicama $\vec{r} = (1, 2, 0) + t(1, 1, 1)$ in $\vec{s} = (2, 3, 1) + t(0, 3, -1)$ določi normalno obliko. Ali se premici sekata?
7. Določi razdaljo od točke $A = (7, 6, 10)$ do premice, ki gre skozi $B = (3, 7, 0)$ in $C = (4, 9, -2)$.
8. Določi parametrično in normalno enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A = (-1, 1, 3)$, $B = (1, 4, -1)$ in $C = (2, -3, 1)$.

Četrte vaje

1. Naj bo ravnina podana z normalo $\vec{n} = (7, 1, 0)$ in točko $x_0 = (2, 3, -1)$. Zrcali točko $A = (4, 3, 5)$ čez ravnino in določi razdaljo od točke do zrcaljene točke.
2. Določi razdaljo med premicama $R = (0, 0, 1, -1)t + (2, 2, 4, 0)$ in $S = (1, 0, 2, 0)s + (-3, 0, 1, -1)$ v $\mathbb{R}^4$.
3. Projiciraj premico $(1, 0, 3, 4)t + (1, 1, 0, 0)$ na hiper-ravnino podano z $x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$.