

1. DOMAČA NALOGA

Oddaja rešitev nalog v dogovoru s tutorji v tednu od ponedeljka 8. 11. 21 dalje.

1. (10) Pokažite, da enačbi

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{ter} \quad y = z \sin(z)$$

določata gladko omejeno krivuljo Γ v odprti množici $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x > 0, \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2}\}$ in izračunajte njeno dolžino.

2. (10) Pokažite, da enačbi

$$z = xy \quad \text{ter} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

določata gladko omejeno krivuljo Γ v $\mathbf{R}^3$ in poiščite vse točke na tej krivulji, v katerih je tangenta na Γ vzporedna vektorju $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

3. (10) Za $a > 0$ izračunajte

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos(x) - 1 + ax}{x} dx.$$

Ali ima F kakšno ničlo za $a > 0$?

4. (10) Naj bo

$$f(t) = \int_0^\infty x^t e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Določite vse vrednosti t , za katere integral obstaja in za katere velja $f(t + \frac{1}{2}) = 6f(t)$. Za te vrednosti t izračunajte $f(t)$.

5. (10) Naj bo f gladka omejena funkcija na $\mathbf{R}$, katere prvi in drugi odvod sta tudi omenjeni funkciji na $\mathbf{R}$. Za $x \in \mathbf{R}$ in $t \geq 0$ definiramo integral

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} f(x - 2z\sqrt{t}) dz.$$

Pokažite, da je integral enakomerno konvergenten na $\mathbf{R} \times [0, \infty)$. Pokažite, da lahko F vsaj dvakrat odvajamo po obeh parametrih na $\mathbf{R} \times (0, \infty)$, ter da na $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ velja $F_{xx} = F_t$. Za vsak $x \in \mathbf{R}$ izračunajte še limito

$$\lim_{t \downarrow 0} F(x, t).$$