

ZAPOREDJA REALNIH ŠTEVIL

- (1) Premisli, da je vsako realno število limita zaporedja racionalnih števil.
- (2) Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje z limito nič, $(b_n)_n$ pa omejeno zaporedje. Dokaži, da ima tudi zaporedje $(c_n)_n$ limito nič, kjer je $c_n = a_n b_n$.
- (3) Določi vsa stekališča zaporedja $(a_n)_n$.

(a) $a_n = (-1)^n + 1^n$

(b) $a_n = \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

- (4) Izračunaj limito zaporedja:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{n^4+n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5n+\dots+2n-1}{n+3}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \sqrt{n^2+1} - n^3)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^{n-1}}}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+2)!}$

- (5) Izračunaj limito zaporedja $(a_n)_n$, kjer je

$$a_n = \left(-\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{\sqrt{n+1}}{n}\right) + \left(-\frac{\sqrt{n+2}}{n} + \frac{\sqrt{n+3}}{n}\right) + \dots + \left(-\frac{\sqrt{n+2n}}{n} + \frac{\sqrt{n+2n+1}}{n}\right)$$

- (6) Zaporedje $(a_n)_n$ podamo z začetnim členom $a_0 = 3$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{a_n - 1}$. pokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito. Katera realna števila bi bila lahko limite tega zaporedja z enako rekurzivno zvezo in drugim začetnim členom?

- (7) Izračunaj limito zaporedja $(a_n)_n$, kjer je:

(a)

$$a_n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!2^{3n}}$$

(b)

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

- (8) Dokaži, da je množica $A \subseteq \mathbb{R}$ zaprta natanko tedaj, ko vsebuje vsa stekališča zaporedij $(a_n)_n \subseteq A$.