

## Podprostori

Podmnožica metričnega prostora je tudi metrični prostor:  
funkcijo razdalje zožimo na točke iz podmnožice

Podobno računamo pri topoloških prostorih:

$(X, \mathcal{T})$  topološki prostor,  $A \subseteq X$

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$



$\mathcal{T}_A$  je topologija na A

$$(1) \quad \emptyset \in \mathcal{T}_A, \quad \phi = \phi \cap A, \quad A = X \cap A$$

$$(2) \quad \bigcup_{\lambda} A \cap U_{\lambda} = A \cap \bigcup_{\lambda} U_{\lambda} \in \mathcal{T}_A$$

$$(3) \quad (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) \cap \dots \cap (A \cap U_n) = A \cap (U_1 \cap \dots \cap U_n)$$

$\mathcal{T}_A$  je inducirana ali podedovana topologija.

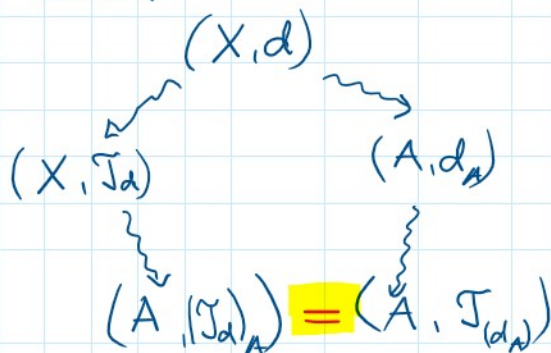
$(A, \mathcal{T}_A)$  je podprostor prostora  $(X, \mathcal{T})$

### Primeri

• Evklidska topologija na  $\mathbb{R}^{(n)}$  inducira evklidsko topologijo na  $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times 0$ .



• Metrika na X inducira topologijo na  $A \subseteq X$  na dva načina:



- $B \subseteq A \subseteq X$ ,  $\mathcal{T}$  topologija na  $X$   
 $\leadsto \mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$  v obeh primerih so odprte množice oblike  $B \cap U_{\mathcal{T}}$
- Topologija, ki jo  $\mathbb{N}$  podeduje od  $\mathbb{R}$  je diskretna



Odprte množice v  $A$  so preseki  $A \cap$  odprtih množic v  $X$

Trditev

Zaprte množice v  $A$  so preseki  $A \cap$  zaprtih množic v  $X$ .

Dokaži

$$\begin{aligned} \underline{F \text{ zap v } X} &\Rightarrow \underline{A \cap F \text{ zap v } A} \\ \text{glede na } \mathcal{T} &\quad \text{glede na } \mathcal{T}_A \\ X - F \in \mathcal{T} &\quad A - A \cap F \in \mathcal{T}_A \\ &\quad \parallel \\ &\quad A \cap (X - F) \end{aligned}$$

$$\underline{F \text{ zap v } A} \Rightarrow \underline{\exists F' \text{ zap v } X, F = A \cap F'}$$

$$F = A - V \quad \text{po def.} \quad \leadsto \quad V = A \cap \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U, \quad F' := X - U$$

□



Trditev  $\mathcal{B}$  baza  $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$  je baza  $\mathcal{T}_A$

posebej, če ima  $(X, \mathcal{T})$  skleno bazo, jo ima tudi  $(A, \mathcal{T}_A)$

Topološka lastnost je **dedna**, če se prenaša na podprostor:

$$\mathcal{T} \text{ ima lastnost } L \Leftrightarrow \mathcal{T}_A \text{ ima lastnost } L \quad \forall A \subseteq X$$

- diskretnost, trivialnost sta dedni
- 1-števnost, 2-števnost sta dedni



- metrizabilnost je dedna

- separabilnost ni dedna (vendar se deduje na odprtih podprostorih)  
 $X$  neštevno, diskreten (ni separabilen)

$X' := X \setminus \{a\}$ , kjer  $a$  je samo cel  $X$

$X'$  je separabilen, podprostor  $X$  pa ni separabilen

- povezanost (ločitno) ni dedna

kompaktnost ni dedna (vendar je zaprt podprostor kompakten, tj. kompaktnost se deduje na zaprtih podprostorih)

Osnovni pojmi, notranjost, meja in zaprtje, so odvisni od prostora, v katerem jih opazujemo

$X := \mathbb{R}$ ,  $A := [0, 1)$



$$\text{Int}_X [0, 1) = (0, 1)$$

$$\text{Fr}_X [0, 1) = \{0, 1\}$$

$$\text{Cl}_X [0, 1) = [0, 1]$$

$$\text{Int}_A [0, 1) = [0, 1)$$

$$\text{Fr}_A [0, 1) = \emptyset$$

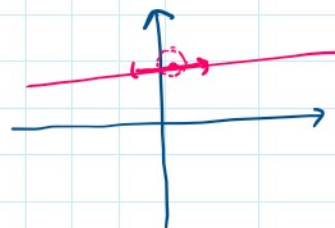
$$\text{Cl}_A [0, 1) = [0, 1)$$

Trditve  $B \subseteq A \subseteq X$

$$\text{Cl}_A B = A \cap \text{Cl}_X B$$

$$\text{Int}_A B \supseteq A \cap \text{Int}_X B$$

$$\text{Fr}_A B \subseteq A \cap \text{Fr}_X B$$



Dokaz

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{Cl}_A B &= \bigcap \{ F \mid B \subseteq F^{\text{zap}} \subseteq A \} = \bigcap \{ A \cap F' \mid B \subseteq F'^{\text{zap}} \subseteq X \} \\ &= A \cap \left( \bigcap \{ F' \mid B \subseteq F'^{\text{zap}} \subseteq X \} \right) = A \cap \text{Cl}_X B \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{Int}_A B = \bigcup \{ U \mid U^{\text{odp}} \subseteq A, U \subseteq B \} = \bigcup \{ A \cap U' \mid U'^{\text{odp}} \subseteq X, U' \cap A \subseteq B \}$$

$$(2) \text{Int}_A B = \bigcup \{ U \mid U^{\text{odp}} \subseteq A, U \subseteq B \} = \bigcup \{ A \cap U' \mid U'^{\text{odp}} \subseteq X, U' \cap A \subseteq B \} \\ \supseteq A \cap \left( \bigcup \{ U' \mid U'^{\text{odp}} \subseteq X, U' \subseteq B \} \right) = A \cap \text{Int}_X B$$

(3) ✓



Množica, ki je odprta/zaprta v podprostoru, ni nujno odprta/zaprta v celotnem prostoru.



Trditve

$$(1) B^{\text{odp}} \subseteq A, A^{\text{odp}} \subseteq X \Rightarrow B^{\text{odp}} \subseteq X$$

$$(2) B^{\text{zap}} \subseteq A, A^{\text{zap}} \subseteq X \Rightarrow B^{\text{zap}} \subseteq X$$

Dokaz

$$(1) B^{\text{odp}} \subseteq A \Rightarrow B = A \cap U, U^{\text{odp}} \subseteq X; \text{ ker je tudi } A^{\text{odp}} \subseteq X \\ B = A^{\text{odp}} \cap U^{\text{odp}}, \text{ torej je } B^{\text{odp}} \subseteq X$$

(2) ✓



Povezave z zveznostjo:

- inkluzija  $i: (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$  je zvezna  
 $U \in \mathcal{T}, i^{-1}(U) = A \cap U$

( $\mathcal{T}_A$  je najmanjša topologija na  $A$ , za katero je inkluzija zvezna.)

- $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  zvezna

$$A \subseteq X \Rightarrow f|_A: (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (Y, \mathcal{T}') \text{ zvezna} \\ \hookrightarrow = f \circ i, \text{ } i \text{ inkluzija } A \hookrightarrow X$$

$$f(X) \subseteq B \Rightarrow f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (B, \mathcal{T}'_B) \text{ zvezna}$$

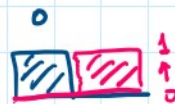
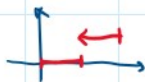


Zvezne funkcije pogosto definiramo odsekom:  $f(x) = \begin{cases} \dots, & \text{če } x \dots \\ \dots, & \dots \end{cases}$

$f$  je zvezna, če je zvezna na vsakem odseku in se definicije njemajo na presekih.

Je potrebno biti previden?

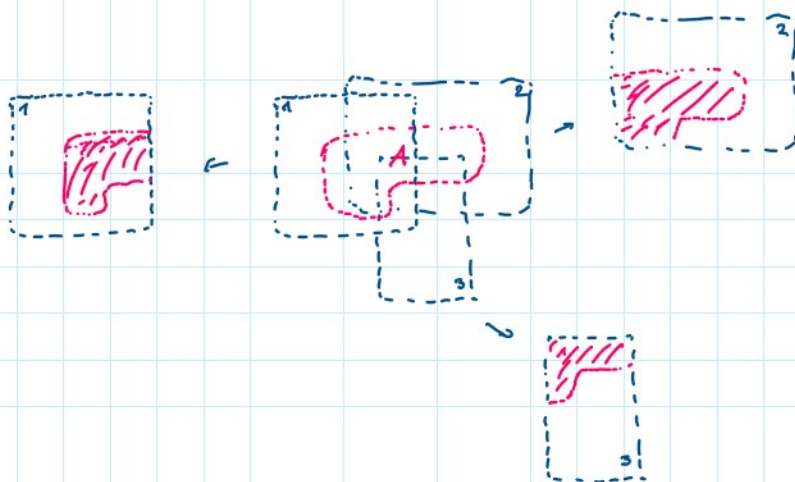
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$



$\{X_\lambda\}$  pokritje ('atlas') za  $X$ ; odprtost/zaprtaost množic in zveznost funkcij preverjamo na kartah atlasa.



IZREK

(1)  $\{X_\lambda\}$  odprto pokritje za  $X$

$A \subseteq X$  je odprta  $\Leftrightarrow \forall \lambda: A \cap X_\lambda$  je odprta v  $X_\lambda$

(2)  $\{X_\lambda\}$  zaprto in **lokalno končno** pokritje za  $X$   
 $\hookrightarrow$  vsak  $x \in X$  ima okolico, ki seka le končno mnogo  $X_\lambda$

$A \subseteq X$  je zaprta  $\Leftrightarrow \forall \lambda: A \cap X_\lambda$  je zaprta v  $X_\lambda$



Primeri:  
 • npr. pokritje  $\mathbb{R}$  z intervali  $[k, k+1]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 • pokritje  $\mathbb{R}_+$  z intervali  $[k, +\infty)$

Dokaz

(1)  $(\Rightarrow)$  po definiciji v lokalni topologiji

(1)  $\hookrightarrow$   $\dots$

toner

(1)  $(\Rightarrow)$  po definiciji in lokalne topologije

$(\Leftarrow)$   $A = \bigcup_{\lambda} \underbrace{A \cap X_{\lambda}}_{\substack{\text{odp v } X_{\lambda}, \text{ ki so odp v } X \rightsquigarrow A \cap X_{\lambda} \text{ odp v } X}}$  je unija množic, ki so odprte v  $X$ , torej odprta

(2)  $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$   $A = \bigcup_{\lambda} \underbrace{A \cap X_{\lambda}}_{\substack{\text{zap v } X_{\lambda}, \text{ ki so zap v } X \rightsquigarrow A \cap X_{\lambda} \text{ zap v } X}}$  unija zaprtih, ki v splošnem ni zaprt

$x \in X - A$   $x$  ima odp. okolico, ki ne seka  $A$

$x$  ima okolico  $U$ , ki seka le  $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}$

$x \in \bigcup_{\text{odp}} A \cap X_{\lambda_1} - A \cap X_{\lambda_2} - \dots - A \cap X_{\lambda_n}$  odp okolica  $x$ , ki ne seka  $A$

□

IZREK

$\{X_{\lambda}\}$  odprto ali lokalno končno zaprto pokritje  $X$

$f: X \rightarrow Y$  funkcija

$f$  je zvezna  $\Leftrightarrow f|_{X_{\lambda}}$  je zvezna  $\forall \lambda$

**Dokaz**  $(\Rightarrow)$  zoster zvezne funkcije je zvezna

$(\Leftarrow)$  za odprto pokritje:

$$U^{\text{odp}} \subseteq Y, \quad f^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(U) \cap X_{\lambda} = \bigcup_{\lambda} \underbrace{(f|_{X_{\lambda}})^{-1}(U)}_{\substack{\text{odp v } X_{\lambda} \\ \rightsquigarrow \text{odp v } X}} \\ \rightsquigarrow \text{unija je odp}$$

za zaprto pokritje je podobno

$$F^{\text{zap}} \subseteq Y, \quad f^{-1}(F) \cap X_{\lambda} = \underbrace{(f|_{X_{\lambda}})^{-1}(F)}_{\substack{\text{zap v } X_{\lambda} \\ \rightsquigarrow \text{zap v } X}} \text{ uporabilo trditev.}$$

□

Alternativna formulacija:

$\{X_{\lambda}\}$  odprto ali lokalno končno zaprto pokritje  $X$



$\{X_\lambda\}$  odprto ali lokalno končno zaprto pokritje  $X$   
 $\{f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y\}$  zvezne

Če  $\forall \lambda, \mu$  velja  $f_\lambda|_{X_\lambda \cap X_\mu} = f_\mu|_{X_\lambda \cap X_\mu}$ , potem

pravilo  $f(x) := \begin{cases} f_\lambda(x), & x \in X_\lambda \\ \vdots \end{cases}$  definira zvezno funkcijo  $f: X \rightarrow Y$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$k \in \mathbb{N}_0 \mapsto k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R} \end{array}$$

inducirana top.  
je diskreten

$$k \in \mathbb{N}_0 \mapsto \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & & 1 \end{array}$$

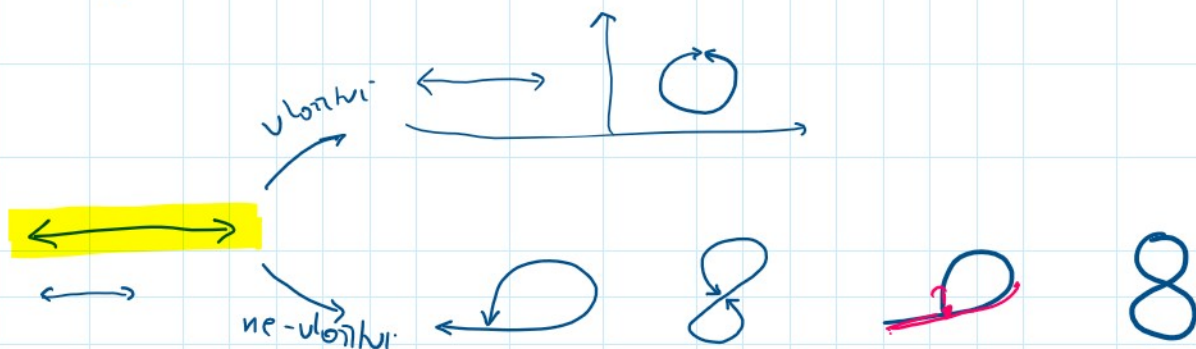
inducirana top.  
ni diskreten

$f: X \rightarrow Y$  je **vložitelj**, če je  $f: X \rightarrow f(X)$  homeomorfizem  
 (glede na podredovano topologijo)

$$f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}') \rightsquigarrow f: (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$$

• vsaka izometrija  $f: (X, d) \rightarrow (X', d')$  je vložitelj

Vsaka vložitelj je injektivna in zvezna, vendar zvezne injektorje  
 niso nujno vložitelje.



Trditveni  $f: X \rightarrow Y$  zvezna injektivna

•  $f(x)$  <sup>odprta</sup>  $\subseteq Y$ , potem

$f$  je vložitel  $\Leftrightarrow f$  je odprta preslikava  
(odprta vložitel)

•  $f(x)$  <sup>zaprta</sup>  $\subseteq Y$ , potem

$f$  je vložitel  $\Leftrightarrow f$  je zaprta preslikava  
(zaprta vložitel)

□

Invarianca odprtih množic:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zvezna, injektivna  $\Rightarrow f$  je vložitel