

TGP, 2021/22
5. VAJE : 3. 11. 2021

1. Pokaži, da je razred nilpotentnih grup zaprt za podgrupe, kvociente in direktne produkte.
2. Naj bo G nilpotentna grup. Pokaži, da je dolžina zgornje centralne vrste enaka dolžini spodnje centralne vrste.
3. Naj bo $N \leq Z(G)$ in G/N nilpotentna grupa. Pokaži, da je G nilpotentna.
4. V komutativnem diagramu eksaktnih zaporedji

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

sta f in h izomorfizma. Pokaži, da je tudi g izomorfizem.

5. Imamo razširitev

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1,$$

kjer je N abelova. Izberemo transversalo N v G (prerezno funkcijo $\tau: Q \rightarrow G$). Definiramo delovanje $Q \rightarrow \text{Aut}(N)$ s $q \cdot n = \tau(q)n\tau(q)^{-1}$. Pokaži, da je delovanje neodvisno od transverzale.

6. Imamo razširitev

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1,$$

kjer je A abelova in Q ciklična moči $n \in \mathbb{N}$. Naj bo q generator grupe Q in $g \in G$ s $\pi(g) = q$. Definiramo prerez $\tau(q^j) = g^j$ za $0 \leq j \leq n$. Izračunaj kocikel, ki ga določa prerez.