

# Funkcije več spremenljivk

## Tangentna ravnina

Tangentna ravnina na graf funkcije  $z = f(x, y)$  ima normalo  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ .

1. Določi enačbo tangentne ravnine na graf funkcije  $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$  v točki  $(0, 2, f(0, 2))$ .

**Rešitev:**  $x - y + z = 0$

## Odvod posredne funkcije, verižno pravilo

2. Naj bo  $z = f(x, y)$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Izračunaj parcialna odvoda  $\frac{\partial z}{\partial r}$  in  $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$  ter ju izrazite s kartezijskimi koordinatami.

**Rešitev:**

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi = -\frac{\partial f}{\partial x} y + \frac{\partial f}{\partial y} x$$

3. Poišči naslednje posredne odvode:

(a)  $\frac{dz}{dt}$ , če je  $z = e^{x-2y}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = t^3$

(b)  $\frac{\partial z}{\partial u}$  in  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , če je  $z = x^2 \ln y$ ,  $x = \frac{u}{v}$ ,  $y = 3u - 2v$

**Rešitev:**

(a)  $\frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2)$

(b)  $\frac{\partial z}{\partial u} = 2 \frac{u}{v^2} \ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v} = -2 \frac{u^2}{v^3} \ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$

4. S pomočjo posrednega odvajanja izračunajte odvod funkcije  $w$ , podane s predpisom  $w(t) = t^{\cos t}$ .

**Rešitev:**  $\frac{dw}{dt} = t^{\cos t} \left( \frac{\cos t}{t} - \ln t \sin t \right)$

5. Izračunaj odvod  $y'(0)$ , če je  $e^{xy} + 2x^2 - 3y = 0$ .

**Rešitev:**  $y'(0) = \frac{1}{9}$

6. Poišči  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ , če je  $z = f(u, v)$ ,  $u = x + y$ ,  $v = xy$ .

**Rešitev:**  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x + y) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$

7. Pokaži, da

$$y = f(x + at) + g(x - at),$$

kjer je  $a$  konstanta,  $f$  in  $g$  pa poljubni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, ustreza enačbi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

8. Zapiši Laplaceov operator  $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  v polarnih koordinatah.

**Rešitev:**  $\Delta f(r, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$