

Funkcije več spremenljivk

Taylorjeva vrsta

1. Funkcijo $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke $(1, -2)$.

Rešitev: $f(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2$

2. Naj bo $f(x, y) = x \cos(xy^2)$.

(a) Razvijte f v Taylorjevo vrsto okrog točke $(0, 0)$.

(b) Izračunajte $\frac{\partial^7 f}{\partial x^3 \partial y^4}(0, 0)$, $\frac{\partial^{61} f}{\partial x^{21} \partial y^{40}}(0, 0)$ in $\frac{\partial^{62} f}{\partial x^{22} \partial y^{40}}(0, 0)$.

Rešitev:

(a) $f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k x^{2k+1} y^{4k}$

(b) $\frac{\partial^7 f}{\partial x^3 \partial y^4}(0, 0) = -72$, $\frac{\partial^{61} f}{\partial x^{21} \partial y^{40}}(0, 0) = 21 \cdot 40!$, $\frac{\partial^{62} f}{\partial x^{22} \partial y^{40}}(0, 0) = 0$

3. Dana je funkcija $f(x, y) = \ln(1 + xy^2)$.

(a) Zapišite Taylorjev polinom reda 6 za to funkcijo okrog izhodišča.

(b) Izračunajte $f_{xyyyyy}(0, 0)$ in $f_{xxxxyy}(0, 0)$.

Rešitev:

(a) $T_6(x, y) = xy^2 - \frac{1}{2}x^2y^4$

(b) $f_{xyyyyy}(0, 0) = -24$, $f_{xxxxyy}(0, 0) = 0$

4. Dana je funkcija $f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$.

(a) Določite Taylorjev polinom drugega reda okrog točke $(8, 25)$.

(b) Približno izračunajte $\frac{\sqrt[3]{8.06}}{\sqrt{24.5}}$.

Rešitev:

(a) $T_2(x, y) = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{50}(y - 25) + \frac{3}{8 \cdot 25^2}(y - 25)^2 + \frac{1}{24}(x - 8) - \frac{1}{25 \cdot 50}(x - 8)(y - 25) - \frac{1}{9 \cdot 64}(x - 8)^2 \right)$

(b) $T_2(8.06, 24.5) = 0.4050675$