

Kompleksna števila

1. Izračunaj vrednost naslednjih izrazov.

(a) $(2 + 3i)(3 + 2i)(-i)$

(b) $2i^6 - 3i^{15} + 4i^{20} - i^{-5}$

(c) $(-2i^3)^3 + 4(i^2)^6 - (-i5)^3 + 6i^2$

(d) $(\sqrt{2} + i)^3 + (\sqrt{2} - i)^3$

(e) $\frac{5+3i}{-2-i}$

(f) $\left| \frac{-5+10i}{8+6i} - \frac{25+5i}{3-4i} \right|$

Rešitev:

(a) 13

(b) $2 + 4i$

(c) $-2 - 9i$

(d) $-2\sqrt{2}$

(e) $-\frac{13}{5} - \frac{1}{5}i$

(f) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

2. Poišči realno in imaginarno komponento ter konjugirano vrednost kompleksnega števila

$$z = \frac{i}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}.$$

Rešitev: $\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$, $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

3. Naj bo $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ kompleksno število. Če velja $|z| = 1$, dokaži, da je število $i \frac{z+1}{z-1}$ realno.

4. Če je $|z_1| = |z_2| = 1$ in $z_1 z_2 \neq -1$, dokaži, da je $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ realno število.

5. Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo.

(a) $\bar{z} = z^2$,

(b) $|z| + z = 2 + i$,

(c) $2z^2 - 3\bar{z}^2 = 10i$,

(d) $|z + 1| = |2z - 1|$,

(e) $\operatorname{Im} z^2 = 6$,

(f) $z(z - i) = i\bar{z}$.

Rešitev:

(a) $z_1 = 0, z_2 = 1, z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $z = \frac{3}{4} + i$

(c) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 - i$

(d) $\{x + iy : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$, tj. krožnica s središčem v $(1, 0)$ in polmerom 1.

(e) $\{x + iy : xy = 3\}$, tj. hiperbola.

(f) $z_1 = 0, z_2 = \pm 1 + i$.

6. V kompleksni ravnini skiciraj naslednje množice

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z^2 = 4\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{7\pi}{4}, 1 < |z| \leq 2\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i + 2| \leq 4\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$

(f) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| + |z + 3| \leq 10\}$

Rešitev:

(a) $\{x + ix : x \in \mathbb{R}\}$, tj. simetrala daljice med 1 in i .

(b) $\left\{x + iy : \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1\right\}$, tj. hiperbola.

(c) Del kolobarja med radijema 1 in 2 in med kotoma $\frac{\pi}{4}$ in $\frac{7\pi}{4}$.

(d) $\{x + iy : (x - 1)^2 + y^2 \leq 16\}$, tj. zaprt krog s središčem $-2 + i$ in polmerom 4.

(e) $\{x + ix : x \in \mathbb{R}\}$, tj. simetrala daljice med 1 in i .

(f) Območje znotraj elipse $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ in na njej.

7. Naslednja kompleksna števila zapiši v polarni obliki.

(a) $-1 - i$

(b) -3

Rešitev:

(a) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

(b) $3(\cos \pi + i \sin \pi)$

8. Izračunaj vrednost naslednjih izrazov.

(a) $1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^3$

(b) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$

(c) $\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(1+i)^{10}}$

(d) $\sqrt[5]{-3 + \sqrt{3}i}$

Rešitev:

(a) 0

(b) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) 1024

(d) $\sqrt[10]{12} \left(\cos \left(\frac{5\pi + 2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi + 2\pi k}{5} \right) \right), k = 0, 1, 2, 3, 4$

9. Izračunaj vrednost izraza $\sqrt{-9 + 12i}$.

Rešitev: $\sqrt{3} + i2\sqrt{3}, -\sqrt{3} - i2\sqrt{3}$

10. V kompleksnih številih reši naslednje enačbe in skiciraj rešitve v kompleksni ravnini.

(a) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i,$

(b) $z^3 + i = 0,$

(c) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = -i,$

(d) $z^6 + z^3 - 12 = 0.$

Rešitev:

(a) $z_1 = -\sqrt{3} - i, z_2 = 1 - i\sqrt{3}, z_3 = -1 + i\sqrt{3}, z_4 = \sqrt{3} + i$

(b) $z_1 = i, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

(c) $z_1 = -i, z_2 = i(2 - \sqrt{3}), z_3 = i(2 + \sqrt{3})$

(d) $z_1 = -\sqrt[3]{4}, z_2 = \sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), z_3 = \sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$
 $z_4 = \sqrt[3]{3}, z_5 = \sqrt[3]{3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), z_6 = \sqrt[3]{3} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

11. Za $r > 0$ in $\varphi \in \mathbb{R}$ seštej

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \cos(k\varphi) \quad \text{in} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k \sin(k\varphi).$$

Rešitev:

$$C_n = \frac{r^{n+1} \cos((n-1)\varphi) - r^n \cos(n\varphi) - r \cos \varphi + 1}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1},$$

$$S_n = \frac{r^{n+1} \sin((n-1)\varphi) - r^n \sin(n\varphi) + r \sin \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1}.$$